

Zur heuristischen Begründung der Feldgleichungen
freier Teilchen.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt

von

Werner Langbein

aus

Hofheim / Ts.

Frankfurt am Main 1964

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main.



Dekan: Prof. Dr. Franz

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Steinwedel

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Süßmann

Tag der mündlichen Prüfung: 24.7.1964

Inhalt

	Seite
1. Einleitung	3
2. Die Zustände definierten Impulses und Spins	5
3. Der Übergang zur Ortsdarstellung	13
4. Raumspiegelungen und Feldgleichungen	21
5. Übergang zur Vielteilchentheorie und Hinzunahme der Antiteilchen. - Die diskreten Symmetrien	24
6. Die einzelnen Theorien	32
a) Skalartheorie	34
b) Diracsche- und Weylsche Theorie	35
c) Proca-Gleichungen und elektromagnetisches Feld	39
7. Anhang	44
Literaturverzeichnis	50

Zur Nomenklatur:

Falls nicht ausdrücklich anders definiert, sollen große Buchstaben Operatoren, die entsprechenden kleinen Buchstaben die Eigenwerte dazu bezeichnen. Räumliche Vektoren sollen durch einen Pfeil (d.h. etwa der Impuls durch $\vec{p}$), Vierervektoren durch einfache Buchstaben (d.h. etwa der Viererimpuls durch p) gekennzeichnet werden. Bei Verwendung der Indexschreibweise sollen lateinische Indizes von 1 bis 3, griechische von 0 bis 3 laufen.

1. Einleitung

Sieht man von "modernen" Formulierungen ab, die bisher kaum Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden haben, so basieren die geläufigen Darstellungen der Quantenfeldtheorie (vgl. etwa Bogoliubov - Shirkov [1]) in der Regel auf der "kanonischen" Quantisierung: man postuliert eine Lagrangefunktion oder auch gleich die daraus folgenden Feldgleichungen, unterwirft die Feldoperatoren $\psi(x)$ den bekannten Quantisierungsvorschriften und erhält schließlich aus der Untersuchung der Lösungsmannigfaltigkeiten erst die Charakteristika der durch sie beschriebenen Teilchen. Ganz abgesehen davon, daß dieser recht formale Weg vom physikalischen Standpunkt aus wenig befriedigend ist, verführt er dazu, den Feldgleichungen eine Bedeutung beizumessen, die ihnen bei näherer Untersuchung gar nicht zukommt.

Es ist daher offenbar sinnvoller, die Teilcheneigenschaften zum Ausgangspunkt der Theorie zu machen und zu versuchen, rückwärts daraus auf die Struktur der entsprechenden Felder und die Feldgleichungen zu schließen.

Unter welchen Voraussetzungen dies möglich ist, soll in der vorliegenden Arbeit untersucht werden.

Da die Eigenschaften von Elementarteilchen in erster Linie aus Streuexperimenten erschlossen werden, gehen wir beim Aufbau des Zustandsraums von Zuständen freier Teilchen mit definiertem Impuls und Spin (bzw. den zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_n^+(\vec{p}), a_n(\vec{p})$) aus, weil diese dort als Anfangs- bzw. Endzustände eine unmittelbare Bedeutung haben. Die dynamischen Eigenschaften des einzelnen Teilchens sind dann durch die Masse $p_\mu p^\mu = m^2$ sowie die Zahl der möglichen Spineinstellungen $N = 2s+1$ festgelegt.

Der Übergang von den Feldoperatoren $\psi(x)$ zu den $a_n(\vec{p})$ wird gewöhnlich dadurch bewerkstelligt, daß man die Lösungen der Feldgleichungen zu definiertem Impuls und Spin bei der Entwicklung der $\psi(x)$ nach den $a_n(\vec{p})$ als Koeffizienten benutzt. Wir wollen jedoch gemäß unserer Fragestellung untersuchen, wie dieser Übergang in umgekehrter Richtung und ohne Rückgriff auf eine Feldgleichung lediglich unter Verwendung der durch die $a_n(\vec{p})$ festgelegten Teilcheneigenschaften vollzogen werden kann.

Es stellt sich dabei heraus, daß man sich jeweils auf einen $2s+1$ komponentigen Feldoperator beschränken kann, wenn man für ihn nur lokales Transformationsverhalten bei eigentlichen Lorentztransformationen verlangt. Stellt man die zusätzliche Forderung, daß sich der Feldoperator auch bei Raumspiegelungen lokal transformiert, so wird man notwendigerweise zu einem $2(2s+1)$ komponentigen Feld geführt, das sich aus zwei $2s+1$ komponentigen Anteilen obiger Art, die bei Raumspiegelungen ineinander übergehen, zusammensetzt. Die $2(2s+1)$ Feldkomponenten sind dann jedoch nicht unabhängig voneinander. Die Relationen, die zwischen ihnen bestehen, führen vielmehr zu gewissen Feldgleichungen, die z.B. im Falle $m=0, s=1/2$ bzw. 1 mit der Dirac- bzw. Proca-Gleichung und im Falle $m=0$ mit der Weylschen bzw. den Maxwell-Gleichungen übereinstimmen. Man bekommt somit zugleich einen heuristischen Zugang zu den

bekannten Feldgleichungen, die hier offensichtlich nur eine sekundäre Rolle spielen.

Die Betrachtung wird der Einfachheit halber zunächst für die Einteilchenzustände durchgeführt; die Antiteilchen fügen sich quasi automatisch in das Schema ein, sie unterscheiden sich in ihren Beiträgen zum Feldoperator von den Ausgangsteilchen durch das Vorzeichen der Frequenz. Da die Behandlung von Systemen mehrerer Teilchen ohne Diskussion der Wechselwirkung nicht sehr sinnvoll ist, werden die Mehrteilchenzustände hier nur kurz gestreift; im Rahmen dieser Untersuchung bieten sie jedenfalls keine Schwierigkeiten.

2. Die Zustände definierten Impulses und Spins.

Bei Beschränkung auf Einteilchenzustände spielt es zunächst keine Rolle, ob die Teilchen der Bose- oder der Fermistatistik gehorchen⁺. Weiterhin wählen wir für Operatoren und Zustände das Heisenbergbild; Zustände hängen nur dann von der Zeit ab, wenn dies explizit angezeigt wird. Die im folgenden auftretenden Operatoren sind also im allgemeinen zeitabhängig und wirken im Einteilchenraum.

Die Festlegung einer geeigneten Spinquantenzahl für die Zustände scharfen Impulses gelingt wie folgt:

Legen wir für Impuls $\vec{P}$ und Drehimpuls $\vec{J}$ die aus der gewöhnlichen Quantenmechanik bekannten Vertauschungsrelationen

$$[\vec{J}_i, P_k] = i \epsilon_{ikl} P_l, \quad [\vec{J}_i, P_i] = 0$$

(ϵ_{ikl} dreidimensionales total antisymmetrisches Symbol) zugrunde, so läßt sich leicht zeigen, daß das Skalarprodukt $(\vec{J} \vec{P})$ mit Impuls und Energie vertauschbar ist, also zugleich mit ihnen diagonalisiert werden kann. Die gemeinsamen Eigenzustände

⁺Zur Frage des Zusammenhangs zwischen Spin und Statistik vgl. z.B. Pauli [2] und Lüders [3]

seien $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ dh.:

$$\vec{p} \mid \vec{p} \vec{n}\rangle = \vec{p} \mid \vec{p} \vec{n}\rangle, \quad (\vec{j} \vec{p}) \mid \vec{p} \vec{n}\rangle = |\vec{p}| \vec{n} \mid \vec{p} \vec{n}\rangle$$

$\vec{n}$ kann dabei als Quantenzahl der Drehimpulskomponente in Impulsrichtung, der "Helizität", ganz- oder halbzahlilig sein. Der Operator $(\vec{j} \vec{p})$ hat außerdem die folgende wichtige Eigenschaft: Falls für die Teilchen ein geeigneter Ortsoperator $\vec{R}$ eingeführt werden kann (vgl. etwa Newton-Wigner [4]), so läßt sich nach:

$$\vec{S} = \vec{j} - \vec{R} \times \vec{p}$$

auch ein Spinoperator definieren und es folgt:

$$(1) \quad (\vec{j} \vec{p}) - (\vec{S} \vec{p})$$

Dieser Zusammenhang gilt unabhängig von der Wahl des Ortsoperators. Es liegt daher nahe, (1) auch wenn, wie im Falle des Lichtquants, kein solcher Operator $\vec{R}$ eingeführt werden kann, generell zur Definition der Spinkomponente in $\vec{p}$ -Richtung zu benutzen. Wir werden also allgemein für ein Spin-s-Teilchen verlangen, daß $\vec{n}$ von -s bis +s laufen kann, d.h. die räumliche Drehgruppe im Spinraum eine $2s+1$ dimensionale Darstellung erfährt. Es sei ferner angenommen, daß das Teilchen keine weiteren inneren Freiheitsgrade besitzt⁺, so daß die Zustände $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ den Einteilchenraum vollständig aufspannen. Für ihr Skalarprodukt gilt:

$$\langle \vec{p} \vec{n} \mid \vec{p}' \vec{n}' \rangle = \delta_{\vec{n} \vec{n}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') N \quad (N \text{ Normierungsfaktor})$$

da Impuls und Helizität hermitesche Operatoren sind und deshalb orthogonale Eigenzustände haben müssen. Wählen wir die Normierung so, daß⁺⁺

$$\int \langle \vec{p} \vec{n} \mid \vec{p}' \vec{n}' \rangle d\sigma' = 1$$

⁺ Falls weitere Freiheitsgrade, wie etwa der Isospin vorhanden sind, beschränken wir uns auf Unterräume zu festen Quantenzahlen dazu; ihre Einführung gelingt ohne Schwierigkeiten.

⁺⁺ $d\sigma = \frac{d^3\vec{p}}{p_0}$ invariantes Flächenelement auf dem positiven Massenhypربولoid.

gilt, so folgt $N = p$, und damit:

$$(2) \langle \vec{p} \vec{n} | \vec{p}' \vec{n}' \rangle = \delta_{\vec{n} \vec{n}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') p_0$$

Die Zustände $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ zeichnen sich nun als Eigenzustände der Helizität zwar durch eine besonders einfache physikalische Bedeutung aus, haben andererseits aber die mathematisch etwas unbequeme Eigenschaft, daß sich ihre Spinindizes $\vec{n}$ impulsabhängig transformieren. Der Index $\vec{n}$ bleibt nämlich per definitionem bei räumlichen Drehungen um die Impulsrichtung ungeändert, so daß seine Transformation bei Drehungen um eine feste Achse von deren Lage zum Impuls abhängt. Zur expliziten Darstellung der Operatoren ist es daher zweckmäßig, von Zuständen $|\vec{p} n\rangle$ auszugehen,⁺ die sich bei Raumdrehungen impulsunabhängig transformieren, ihr Zusammenhang mit den $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ wird bei der Diskussion ihres Transformationsverhaltens von selbst klar werden. Bei Raumdrehungen:

$$\vec{a}' = \Omega \vec{a}$$

($\vec{a}$ beliebiger Raumvektor, Ω Transformationsmatrix)

soll also für die transformierten Zustände gelten.⁺⁺

$$(3) |\vec{p} n\rangle' = 1/(\Omega \vec{p}) m \rangle \sum_{mn} (\Omega)$$

wobei die Matrixelemente $\sum_{mn}$ nur von Ω abhängen. Darüberhinaus sollen die $|\vec{p} n\rangle$ wie die $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ ein System von $2s+1$ linear unabhängigen Zuständen bilden, die den gesamten Teilchenraum aufspannen, so daß die Matrizen $\sum_{mn}$ eine $2s+1$ dimensionale Darstellung der räumlichen Drehgruppe bilden.

Die explizite Form des Drehimpulses im Raum dieser Zustände ergibt sich bei Betrachtung von infinitesimalen Raumdrehungen:

$$\vec{a}' = \vec{a} + \delta \vec{n} \times \vec{a} \quad (\delta \vec{n} \text{ infinitesimaler Drehwinkel})$$

⁺ Der Index n soll hier im Gegensatz zu $\vec{n}$ nicht einen anderen Eigenwert, sondern eine andere Sorte von Zuständen kennzeichnen.

⁺⁺ Über doppelt auftretende Indizes ist in Zukunft stets zu summieren.

Da er (bis auf den Faktor $-i$) mit ihren infinitesimalen Erzeugenden übereinstimmt, muß gelten:

$$|\vec{p}n\rangle' = \{1 - i(\delta\vec{\Omega} \cdot \vec{J})\} |\vec{p}n\rangle$$

Andererseits folgt aus (3):

$$|\vec{p}n\rangle' = |\vec{p}n\rangle - i(i\delta\vec{\Omega} \cdot \vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) |\vec{p}n\rangle - i |\vec{p}m\rangle \delta\Omega_k \Sigma_{mn}^k$$

wobei nun die Σ_{mn}^k die infinitesimalen Erzeugenden der Darstellung $\{\Sigma_{mn}^k\}$ sind und drei feste Matrizen bezeichnen. Für den Drehimpuls folgt also:

$$(4) \quad J_k = i(\vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}})_k + \Sigma^k$$

Die linearen Operatoren $\frac{\partial}{\partial \vec{p}}$ und Σ^k sind dabei im Raum der Einteilchenzustände durch:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} |\vec{p}n\rangle &= \frac{\partial}{\partial \vec{p}} |\vec{p}n\rangle \\ \Sigma^k |\vec{p}n\rangle &= |\vec{p}m\rangle \Sigma_{mn}^k \end{aligned}$$

definiert. Die Σ^k kommutieren nach (3) und (4) mit $\vec{p}$ und genügen den Vertauschungsrelationen:

$$(6) \quad [\Sigma^i, \Sigma^j] = i \Sigma^k \quad (i, j, k \text{ zyklisch})$$

Die Drehimpulskomponente in Richtung des Impulses (Helizität) ist nach (4) durch $\frac{(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|}$ gegeben. Da sie die Eigenwerte $-s, \dots, +s$ haben soll, muß dies auch für die Σ^k gelten, weil die Richtung von $\vec{p}$ in $|\vec{p}n\rangle$ beliebig gewählt werden kann. Da die Matrizen Σ^k $2s+1$ reihig sind, ist dies hinreichend dafür, daß $\{\Sigma_{mn}^k\}$ eine zu $\vec{\Sigma}^2 = s(s+1)$ gehörige irreduzible unitäre Darstellung der räumlichen Drehgruppe ist.

Wir wollen im weiteren die $|\vec{p}n\rangle$ so wählen, daß Σ^z diagonal ist. Die oben eingeführten Zustände scharfer Helizität gehen aus ihnen dann durch die unitäre Transformation:

$$(7) \quad |\vec{p}n\rangle = U(\vec{p}) |\vec{p}n\rangle$$

$$\text{mit} \quad U(\vec{p}) = e^{i \frac{\Sigma^z p_z - \Sigma^x p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}} \mathcal{V}$$

(vgl. Anhang a)

hervor. ($\mathcal{V}$ ist der Winkel zwischen z-Achse und Impuls)

Die $|\vec{p}n\rangle$ bilden also ebenfalls ein Orthogonalsystem im Teilchenraum und erfüllen:

$$(2a) \quad \langle \vec{p}n | \vec{p}'n' \rangle = \delta_{nn'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \rho.$$

und

$$(8) \quad \int |\vec{p}n\rangle \langle \vec{p}n| d\sigma = 1$$

Bisher wurden noch keine Voraussetzungen über das Transformationsverhalten der Theorie beim Übergang zu bewegten Bezugssystemen benutzt; wir wollen daher jetzt die Forderung der relativistischen Invarianz hinzunehmen. Das Skalarprodukt zweier Zustandsvektoren muß dann bei Lorentztransformationen (einschließlich Raumdrehungen und Translationen) invariant bleiben, so daß die inhomogene Lorentzgruppe im Zustandsraum eine unitäre Darstellung erfährt (Wigner [5]).

Die unitären Darstellungen der Lorentzgruppe findet man mehrfach einschlägig behandelt, vgl. etwa Schweber[6], Shirokov[7], Joos[8]. Man gelangt dabei im physikalischen Bereich ($m \geq 0$, endlicher Spin) zu folgender Klassifizierung: Wenn $m \neq 0$ ist, so gibt es zu jedem ganz- oder halbzahligen Wert s (bis auf Äquivalenzen) genau eine irreduzible Darstellung mit $2s+1$ linear unabhängigen Polarisationszuständen. Sie zerfällt für $m=0$ in $2s+1$ irreduzible Darstellungen mit nur je einem Polarisationszustand. Diese sind Eigenzustände der Helizität mit den Eigenwerten $-s, \dots, +s$. Die Helizität erscheint dabei bis auf den Faktor $|\vec{p}|$ als Zeitkomponente des Vektoroperators*

$$W_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} M^{\nu\alpha} P^\beta$$

$M^{\nu\alpha}, P^\lambda$ = Erzeuger der infinitesimalen homogenen Lorentztransformationen bzw. Translationen), der den Vertauschungsrelationen

$$(9) \quad [W_\mu, P_\nu] = 0, [W_\mu, W_\nu] = i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} W^\sigma P^\tau$$

sowie der Beziehung $W_\mu P^\mu = 0$

* $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ vierdimensionales total antisymmetrisches Symbol

genügt (vgl. Schweber[6]). Die oben eingeführten Zustände $|\vec{p}, \vec{n}\rangle$ sind also Eigenzustände des vollständigen Systems vertauschbarer Operatoren $\vec{p}$ und $w_0 = (\vec{J} \cdot \vec{p})$.

Zur Diskussion des Verhaltens der Zustände $|\vec{p}, \vec{n}\rangle$ bei Lorentztransformationen betrachten wir zunächst den Vektoroperator $\vec{w}$. Da er nach (9) mit dem Impuls kommutiert, kann er nur auf die Spinvariable der Zustände $|\vec{p}, \vec{n}\rangle$ wirken; es genügt also im weiteren die Betrachtung von Zuständen festen Impulses $\vec{p}$. Für w_0 folgt nach (4) sofort:

$$w_0 = (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})$$

Legen wir insbesondere die z-Achse in Impulsrichtung, so ergibt sich daraus:

$$w_0 = |\vec{p}| \Sigma^z$$

und die Relationen (9) gehen in:

$$[\Sigma^z, w_x] = i w_y, \quad [\Sigma^z, w_y] = -i w_x$$

$$[w_x, w_y] = i m^2 \Sigma^z$$

$$w_z = p_0 \Sigma^z$$

über; sie lassen sich nach (6) in einfacher Weise durch:

$$w_x = m \Sigma^x, \quad w_y = m \Sigma^y$$

erfüllen. Lassen wir die obige Beschränkung der z-Richtung fallen, so folgt aus diesem Ansatz⁺:

$$(10) \quad \vec{w} = m \vec{\Sigma}_\perp + p_0 \vec{\Sigma}_\parallel$$

Bei infinitesimalen Lorentztransformationen $\delta \vec{u}$, die durch

⁺ Wir benutzen hier für Raumvektoren $\vec{a}$ die Abkürzungen $\vec{a}_\perp = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})}{p^2} \vec{p}$, $\vec{a}_\parallel = \vec{a} - \vec{a}_\perp$. Da $\frac{\vec{w}}{p_0}$ nach der speziellen Relativitätstheorie als Spindrehimpuls zu betrachten ist, läßt sich an diesem Ausdruck auch die Tatsache ablesen, daß Teilchen der Ruhmasse 0 nur in Impulsrichtung polarisiert sein können (vgl. Wigner[9]).

$$\delta \vec{a} = \delta \vec{u} a_0$$

$$\delta a_0 = (\delta \vec{u} \vec{a})$$

(($\vec{a}$, a_0) beliebiger Vierervektor, $\delta \vec{u}$ infinitesimale Geschwindigkeit)

definiert sind, muß nun für den Erwartungswert von W_0 gelten:

$$(11) \quad \delta \langle \phi | W_0 | \phi \rangle = (\delta \vec{u}, \langle \phi | \vec{W} | \phi \rangle)$$

Andererseits folgt aus $[\frac{\partial}{\partial P_i}, P_i] = -\delta_{ii}$ (vgl. Anhang b) und (6).

$$\vec{\Sigma} = -[\frac{\partial}{\partial \vec{P}}, (\vec{\Sigma} \vec{P})]$$

$$\vec{\Sigma}_\perp = \frac{1}{P^2} \{ \vec{\Sigma} \vec{P}^\perp - (\vec{\Sigma} \vec{P}) \vec{P} \} = -\frac{i}{P^2} [(\vec{\Sigma} \times \vec{P}), (\vec{\Sigma} \vec{P})]$$

und somit unter Beachtung von $W_0 = (\vec{\Sigma} \vec{P})$ und (10) auch:

$$\begin{aligned} \vec{W} &= P_0 \vec{\Sigma} + (m - P_0) \vec{\Sigma}_\perp \\ &= -P_0 [\frac{\partial}{\partial \vec{P}}, (\vec{\Sigma} \vec{P})] - i \frac{m - P_0}{P^2} [(\vec{\Sigma} \times \vec{P}), (\vec{\Sigma} \vec{P})] \\ &= [(-P_0 \frac{\partial}{\partial \vec{P}} + \frac{i}{P_0 + m} \vec{\Sigma} \times \vec{P}), W_0] \end{aligned}$$

Die Gleichung (11) geht damit in:

$$\delta \langle \phi | W_0 | \phi \rangle = i (\delta \vec{u}, \langle \phi | [\vec{N}, W_0] | \phi \rangle)$$

über, wobei:

$$i P_0 \frac{\partial}{\partial \vec{P}} + \frac{1}{P_0 + m} \vec{\Sigma} \times \vec{P} = \vec{N}$$

gesetzt ist. Sie ist also insbesondere erfüllt, wenn wir die Zustände nach:

$$(12) \quad |\phi\rangle' = \{ 1 - i (\delta \vec{u} \vec{N}) \} |\phi\rangle$$

transformieren. Man verifiziert nun leicht durch direkte Rechnung, daß bei dieser Transformation der Zustände auch die Erwartungswerte der anderen Komponenten von $\mathbf{W}_M$ sowie des Impulses und Drehimpulses das richtige Verhalten zeigen, so daß (12) als infinitesimale Lorentztransformation der Zustände angesetzt werden kann.*

Insbesondere folgt dann nach (4) und (12) für die Transformation der Zustände $|\vec{p}n\rangle$ bei infinitesimalen Raumdrehungen bzw. Lorentztransformationen:

$$(13) |\vec{p}n\rangle' = \{1 - i(\delta\vec{u} \cdot \vec{J})\} |\vec{p}n\rangle = \{1 + (\delta\vec{u} \times \vec{p}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - i(\delta\vec{u} \cdot \vec{S})\} |\vec{p}n\rangle$$

$$(14) |\vec{p}n\rangle' = \{1 - i(\delta\vec{u} \cdot \vec{N})\} |\vec{p}n\rangle = \{1 + \rho_0 \delta\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\} - \frac{i}{\rho_0 + m} (\delta\vec{u} \cdot \vec{S} \times \vec{p}) |\vec{p}n\rangle$$

Nach (4) hat $\vec{S}$ im Falle $m \neq 0$ die Bedeutung des Drehimpulses im Ruhssystem des Teilchens. Der Term $(\delta\vec{u} \cdot \vec{S} \times \vec{p}) = \frac{1}{\rho_0 + m} (\vec{p} \times \delta\vec{u} \cdot \vec{S})$ in (14) drückt dann einfach die Tatsache aus, daß bei einer infinitesimalen Lorentztransformation ohne Drehung im "Labor-system" im Ruhssystem eine räumliche Drehung um den Winkel $\frac{\vec{p} \times \delta\vec{u}}{\rho_0 + m}$ auftritt.** Eine auf diesem Sachverhalt basierende Einführung dieser Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe für $m \neq 0$ findet sich bei Shirokov [7], vgl. aber auch Joos [8]. Der oben eingeschlagene Weg hat jedoch den Vorteil, daß er den Fall $m = 0$ mit einschließt.

* (12) ist nicht die einzig mögliche Transformation. Weitere ergeben sich etwa durch $\vec{N}' = \vec{N} + \vec{p} f(p)$. Sie unterscheiden sich bei Zuständen scharfen Impulses von ersterer durch Phasenfaktoren.

** Dies ist bekanntlich auch der Grund für die sogenannte Thomas-Präzession, vgl. Thomas [40], Langbein [11].

3. Der Übergang zur Ortsdarstellung.

Wir kommen nun zum wesentlichen Schritt unserer Betrachtung. Wir fragen nach Operatoren $\psi_a^\dagger(x)$, die an Raumzeitpunkten x definiert sind, d.h. nur Aussagen über das Feld im Punkte x enthalten sollen. Das heißt, daß sich bei homogenen Lorentztransformationen L der transformierte Operator $\psi_a^{\dagger'}(x)$ nur aus den $\psi_a^\dagger(Lx)$ zusammensetzen kann, d.h. durch eine lokale Transformation:

$$\psi_a^{\dagger'}(x) = \psi_a^\dagger(Lx) h_{pa}(L)$$

aus ihnen hervorgeht⁺. Beschränken wir uns zunächst wieder wie in Abschnitt 2 auf Einteilchenzustände:

$$\psi_a^\dagger(x) |0\rangle = |x, \alpha\rangle \quad (|0\rangle = \text{Vakuum})$$

so erhalten wir für sie das Transformationsgesetz:

$$(15) \quad |x, \alpha\rangle' = |Lx, \beta\rangle h_{p\alpha}(L)$$

Die eigentliche homogene Lorentzgruppe erfährt also hier durch die Matrizen $h_{p\alpha}(L)$ eine endlich dimensionale (im allgemeinen nichtunitäre) Darstellung⁺⁺. Andererseits müssen sich die $|x, \alpha\rangle$ aus den $|\vec{p}, n\rangle$ linear kombinieren lassen, da letztere ein vollständiges System zur Beschreibung des freien Teilchens bilden. Es muß also eine Funktion $A_{na}(x, \vec{p})$ geben, die

$$(16) \quad |x, \alpha\rangle = \int |\vec{p}, n\rangle A_{na}(x, \vec{p}) d\sigma$$

leistet. Nun ist die durch die Invarianz des Skalarprodukts induzierte unitäre Darstellung $U(L)$ der inhomogenen Lorentzgruppe nach Abschnitt 2 für die $|\vec{p}, n\rangle$ explizit angebar, während die durch die Lokalität der Feldoperatoren bedingte Darstellung der homogenen Lorentzgruppe die $|x, \alpha\rangle$ transformiert. Die Funktion $A_{na}(x, \vec{p})$ stellt somit einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Darstellungen her und ist deshalb für den hier eingeschlagenen

⁺In manchen Fällen kann man beim Übergang zum Ortsraum mit Erfolg auch andere Operatoren benutzen. Vgl. Schröder [42]

⁺⁺

Translationen stellen sich einfach durch $\psi_a^{\dagger'}(x) = \psi_a^\dagger(x+a)$ dar.

Weg bei der Behandlung der Theorie freier Felder grundlegend. Zu ihrer Berechnung gehen wir davon aus, daß bei Lorentztransformationen⁺ nach (15) und (16) gelten muß:

$$(17) \quad |x\alpha\rangle h_{\mu\alpha}(L) = U(L)|x\alpha\rangle = \int U(L) |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(x\vec{p}) d\sigma$$

Um die $A_{n\alpha}(x\vec{p})$ explizit angeben zu können, müssen wir uns natürlich jeweils für eine bestimmte Darstellung $\{h_{\mu\alpha}(L)\}$ der homogenen Lorentzgruppe entscheiden. Durch diese Freiheit kommt eine gewisse Willkür in die Theorie, die jedoch nicht wesentlich ist⁺⁺. Damit die Matrix $A_{n\alpha}(x\vec{p})$ einen umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen den $|x\alpha\rangle$ und den $|\vec{p}n\rangle$ liefert, wählen wir sie zunächst quadratisch. Der Spinorindex α soll also wie n $2s+1$ Werte annehmen können. Die $\{h_{\mu\alpha}\}$ bilden dann eine $2s+1$ -dimensionale Darstellung der homogenen Lorentzgruppe. Ihre infinitesimalen Erzeugenden $M_{\mu\nu}$ müssen bekanntlich den Vertauschungsrelationen:

$$(18) \quad [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$$

genügen. Für die Erzeugenden $J_i' = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} M_{kl}$ von infinitesimalen räumlichen Drehungen:

$$(19) \quad h_{\mu\alpha}(L(\vec{s}, \vec{a})) = \{1 - i(\vec{s}, \vec{a}) \vec{J}'\}_{\mu\alpha}$$

bzw. $N_e' = M_{0e}$ von infinitesimalen Lorentztransformationen:

$$(20) \quad h_{\mu\alpha}(L(\vec{s}, \vec{a})) = \{1 - i(\vec{s}, \vec{a}) \vec{N}'\}_{\mu\alpha}$$

(vgl. (13) und (14)) liefert (18)⁺⁺⁺:

$$a) \quad [J_i', J_k'] = i J_e' \quad b) \quad [N_i', N_k'] = \frac{g_{ee}}{g_{00}} i J_e' = -i J_e'$$

(21)

$$c) \quad [J_i', N_k'] = i N_e' \quad (e, k, i \text{ zyklisch})$$

Es wird sich bei der Festlegung der $A_{n\alpha}$ als bequem erweisen, die

⁺Gemeint sind hier zunächst immer nur die eigentlichen Lorentztransformationen (ohne Spiegelungen).

⁺⁺Beim elektromagnetischen Feld entspricht dies beispielsweise der Freiheit Potentiale oder Feldstärken zu benutzen.

⁺⁺⁺Die J_i', N_e' sind natürlich von den J_i, N_e in (13) und (14) zu unterscheiden, da sie nur die $|x\alpha\rangle$ zu festem x transformieren.

erste dieser Gleichungen durch

$$(22) \quad (J'_k)_{\rho\alpha} = \sum_{\mu} \epsilon^{\mu}_{\rho\alpha}$$

zu erfüllen, wobei $\sum_{\mu} \epsilon^{\mu}_{\rho\alpha}$ die in Abschnitt 2 eingeführten Matrizen sind. Man erreicht wegen ihrer Hermitezität dadurch zugleich, daß sich Raumdrehungen im Spinorraum unitär darstellen. Da bekanntlich (außer der trivialen eindimensionalen) keine endlichdimensionalen unitären Darstellungen der homogenen Lorentzgruppe existieren (vgl. Bargmann, Naimark [13]), können dann die Matrizen $(N'_e)_{\rho\alpha}$ nicht mehr alle hermitesch sein. (21b) und (21c) lassen sich jedoch einfach durch

$$(23) \quad (N'_e)_{\rho\alpha} = \mp i \sum_{\mu} \epsilon^{\mu}_{\rho\alpha}$$

erfüllen. Diese beiden Möglichkeiten sollen parallel weiterbehandelt werden. Damit sind die Matrizen $h_{\rho\alpha}(L)$ festgelegt. Wie man sich leicht überzeugt gehören die durch sie bestimmten Darstellungen der homogenen Lorentzgruppe in der üblichen Bezeichnungsweise für das negative Vorzeichen der Klasse $D^{(10)}$ und für das positive Vorzeichen der Klasse $D^{(01)}$ an. (Vgl. Schweber [6])

Unter Benutzung von (17) können wir uns damit der Berechnung der $A_{n\alpha}(x, \vec{p})$ zuwenden. Da die $|\vec{p}n\rangle$ gerade relativistisch translationsinvariant eingeführt waren, d.h. Eigenzustände zum Viererimpuls P_{μ} sind, muß bei Translationen um den Vierervektor a gelten⁺:

$$U(a) |x\alpha\rangle = |x+a, \alpha\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{bzw.:} \quad \int U(a) |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(x, \vec{p}) d\sigma &= \int e^{-i(p,a)} |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(x, \vec{p}) d\sigma \\ &= \int |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(x+a, \vec{p}) d\sigma \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort:

$$(24) \quad A_{n\alpha}(x, \vec{p}) = e^{-i p x} A_{n\alpha}(0, \vec{p}) = e^{-i p x} A_{n\alpha}(\vec{p})$$

so daß (16) in:

$$(25) \quad |x\alpha\rangle = \int |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(\vec{p}) e^{-i p x} d\sigma$$

übergeht. Bei Lorentztransformationen L folgt daraus nach (17):

$$|\vec{p}n\rangle A_{n\beta}(\vec{p}) h_{\rho\alpha}(L) e^{-i(p, Lx)} d\sigma = \int U(L) |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(\vec{p}) e^{-i p x} d\sigma$$

⁺ $(p,a) = p_{\mu} a^{\mu} = (\vec{p}\vec{a}) - p_0 a_0 = p a$

bzw. in explizit relativistischer Schreibweise $A_{n\alpha}(\vec{p}) = A_{n\alpha}(p)$, $|\vec{p}n\rangle = |pn\rangle$

$$(26) \int |pn\rangle A_{n\beta}(p) h_{\beta\alpha}(L) e^{-i(p,L)} d\epsilon = \int U(L) |pn\rangle A_{n\alpha}(p) e^{-ipx} d\epsilon$$

Substituieren wir darin $p = Lp'$, so nimmt die linke Seite die Gestalt

$$\int |Lp' n\rangle A_{n\beta}(Lp') h_{\beta\alpha}(L) e^{-i p' x} d\epsilon'$$

an, da Flächenelement und Integrationsbereich für p und p' gleich sind. (hier zeigt sich der Vorteil der Benutzung des invarianten Flächenelements $d\epsilon = \frac{d^3\vec{p}}{p_0}$). Nach der Umbenennung $p' \rightarrow p$ folgt damit aus (26)

$$\int |Lp n\rangle A_{n\beta}(Lp) h_{\beta\alpha}(L) e^{-i p x} d\epsilon = \int U(L) |pn\rangle A_{n\alpha}(p) e^{-ipx} d\epsilon$$

bzw.:

$$(27) |Lp n\rangle A_{n\beta}(Lp) h_{\beta\alpha}(L) = U(L) |pn\rangle A_{n\alpha}(p)$$

Wir werten nun (27) für infinitesimale Transformationen (vgl. (13), (14) bzw. (19), (20)) aus, und erhalten, indem wir wieder zu den $|\vec{p}n\rangle$ und $A_{n\alpha}(\vec{p})$ übergehen, für Raumdrehungen:

$$|\vec{p} + \delta\vec{a} \times \vec{p}, n\rangle A_{n\beta}(\vec{p} + \delta\vec{a} \times \vec{p}) \{1 - i(\delta\vec{a} \cdot \vec{J})\}_{\beta\alpha} = \{1 - i(\delta\vec{a} \cdot \vec{J})\} |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(\vec{p})$$

und für Lorentztransformationen:

$$|\vec{p} + p_0 \delta\vec{u}, n\rangle A_{n\beta}(\vec{p} + p_0 \delta\vec{u}) \{1 - i(\delta\vec{u} \cdot \vec{N})\}_{\beta\alpha} = \{1 - i(\delta\vec{u} \cdot \vec{N})\} |\vec{p}n\rangle A_{n\alpha}(\vec{p})$$

Unter Benutzung der Identitäten (13), (14) bzw. (22), (23) und nach Gleichsetzen der Glieder der Ordnung $\delta\vec{a}$ bzw. $\delta\vec{u}$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} (\vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} |\vec{p}n\rangle) A_{n\alpha}(\vec{p}) + |\vec{p}n\rangle (\vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} A_{n\alpha}(\vec{p})) - i |\vec{p}n\rangle A_{n\beta}(\vec{p}) \vec{\Sigma}_{\beta\alpha} &= \\ &= (\vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} |\vec{p}n\rangle) A_{n\alpha}(\vec{p}) - i |\vec{p}n\rangle \vec{\Sigma}_{mn} A_{n\alpha}(\vec{p}) \\ (p_0 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} |\vec{p}n\rangle) A_{n\alpha}(\vec{p}) + |\vec{p}n\rangle (p_0 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} A_{n\alpha}(\vec{p})) \mp |\vec{p}n\rangle A_{n\beta}(\vec{p}) \vec{\Sigma}_{\beta\alpha} &= \\ &= (p_0 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} |\vec{p}n\rangle) A_{n\alpha}(\vec{p}) - \frac{i}{p_0 + m} |\vec{p}n\rangle (\vec{\Sigma}_{mn} \times \vec{p}) A_{n\alpha}(\vec{p}) \end{aligned}$$

Beachten wir, daß sich die $\frac{\partial}{\partial \vec{p}} |\vec{p}n\rangle$ enthaltenden Terme aufheben und gehen zur indexfreien Schreibweise $|\vec{p}n\rangle \rightarrow A_{mn} = A |\vec{p}n\rangle$ über, so folgt daraus:

$$\begin{aligned} (\vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} A) |\vec{p}n\rangle - i A \vec{\Sigma} |\vec{p}n\rangle &= -i \vec{\Sigma} A |\vec{p}n\rangle \\ (p_0 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} A) |\vec{p}n\rangle \mp A \vec{\Sigma} |\vec{p}n\rangle &= -\frac{i}{p_0 + m} (\vec{\Sigma} \times \vec{p}) A |\vec{p}n\rangle \end{aligned}$$

Da nun die $|\vec{p}\hbar\rangle$ im linearen Raum des Teilchens ein vollständiges System bilden, folgen daraus die Operatorgleichungen:

$$(28) \quad i \vec{A} \vec{E} - \vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \vec{A} = i \vec{E} \vec{A}$$

$$(29) \quad \pm \vec{A} \vec{E} - p \frac{\partial}{\partial p} \vec{A} = \frac{i}{p_0 + m} (\vec{E} \times \vec{p}) \vec{A}$$

Sie bilden den Ausgangspunkt für die weitere Berechnung von $\vec{A}$. Aus (28) folgt zunächst $[(\vec{E}\vec{p}), \vec{A}] = 0$ und somit auch:

$$\frac{(\vec{E}\vec{p})}{|\vec{p}|} \{ \vec{A} | \vec{p}\hbar \rangle \} = \hbar \{ \vec{A} | \vec{p}\hbar \rangle \}$$

Da also offensichtlich $\vec{A} | \vec{p}\hbar \rangle$ Eigenvektor zu $\frac{(\vec{E}\vec{p})}{|\vec{p}|}$ ist und die Eigenverträume von $\frac{(\vec{E}\vec{p})}{|\vec{p}|}$ bei festem Impuls eindimensional sind, muß weiter gelten:

$$(30) \quad \vec{A}(\vec{p}) | \vec{p}\hbar \rangle = \alpha_{\hbar}(\vec{p}) | \vec{p}\hbar \rangle$$

$\vec{A}(\vec{p})$ ist also wie $(\vec{E}\vec{p})$ in der Basis $|\vec{p}\hbar\rangle$ diagonal. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Operatoren $\frac{(\vec{E}\vec{p})}{|\vec{p}|}, \dots, \frac{(\vec{E}\vec{p})}{|\vec{p}|}^{2s}$ muß sich nun jeder Operator, der mit $\frac{(\vec{E}\vec{p})}{|\vec{p}|}$ diagonal ist aus ihnen linear kombinieren. $\vec{A}(\vec{p})$ muß sich also als:

$$(31) \quad \vec{A} = \sum_{v=0}^{2s} q_v(\vec{p}) \left(\frac{\vec{E}\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)^v$$

darstellen lassen. Gehen wir mit (31) in (28) ein, so folgt nach kurzer Rechnung $\vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} q_v = 0$; die q_v können also nur vom Impulsbetrag abhängen. Es wird sich als bequem erweisen, diese Abhängigkeit als $q_v(\eta)$ mit $\eta = \frac{E}{p^2}$ zu schreiben. Unter Benutzung der beiden Identitäten $(\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) (\frac{\vec{E}\vec{p}}{|\vec{p}|}) = (\vec{E}\vec{p})$, $(\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) |\vec{p}| = |\vec{p}|$ verifiziert man nun leicht:

$$(\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \vec{A}(\vec{p}) = \sum_{v=0}^{2s} \left(\vec{p}^2 \frac{d q_v}{d \eta} + v q_v \right) \left(\frac{\vec{E}\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)^v$$

$$(\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \alpha_{\hbar}(\vec{p}) = (\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \sum_{v=0}^{2s} q_v (\hbar |\vec{p}|)^v = \sum_{v=0}^{2s} \left(\vec{p}^2 \frac{d q_v}{d \eta} + v q_v \right) (\hbar |\vec{p}|)^v$$

$$\text{und somit: } (\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \vec{A}(\vec{p})) | \vec{p}\hbar \rangle = (\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \alpha_{\hbar}(\vec{p})) | \vec{p}\hbar \rangle$$

Multiplizieren wir nun (29) skalar mit $\vec{p}$, so ergibt sich damit aus obiger Gleichung:

$$\{ \pm A^{\pm} (\vec{\Sigma} \vec{p}) - p_0 (\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) A^{\pm} \} |\vec{p} \vec{n}\rangle = 0 = (\pm \alpha_n^{\pm} |\vec{n}| - p_0 (\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \alpha_n^{\pm}) |\vec{p} \vec{n}\rangle$$

Wegen $(\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \alpha_n^{\pm}(\eta) = \vec{p}^2 \frac{d}{d\eta} \alpha_n^{\pm}(\eta)$ erhalten wir damit für die $\alpha_n^{\pm}(\eta)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{d\eta} \alpha_n^{\pm}(\eta) = \pm \frac{\vec{n}}{p_0 |\vec{p}|} \alpha_n^{\pm}(\eta)$$

Ihre Lösung ist:

$$(32) \quad \alpha_n^{\pm} = C_n^{\pm} (p_0 + |\vec{p}|)^{\pm \vec{n}}$$

wobei die $C_n^{\pm}$ Integrationskonstanten sind, die nicht mehr von η abhängen. Zur vollständigen Festlegung⁺ der $\alpha_n^{\pm}$ fehlen uns noch die Verhältnisse der $C_n^{\pm}$. Zu ihrer Bestimmung multiplizieren wir (29) von links vektoriell mit $\vec{p}$ und ersetzen

$-\vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} A^{\pm}(\vec{p})$ nach (28) durch $i(\vec{\Sigma} A^{\pm} - A^{\pm} \vec{\Sigma})$:

$$\begin{aligned} \pm A^{\pm} (\vec{p} \times \vec{\Sigma}) + i p_0 (\vec{\Sigma} A^{\pm} - A^{\pm} \vec{\Sigma}) &= \frac{i}{p_0 + m} (\vec{\Sigma} \vec{p}^2 - (\vec{\Sigma} \vec{p}) \vec{p}) A^{\pm} \\ &= i (p_0 - m) \vec{\Sigma} A^{\pm} - \frac{i}{p_0 + m} (\vec{\Sigma} \vec{p}) \vec{p} A^{\pm} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\pm A^{\pm} (\vec{p} \times \vec{\Sigma}) - i p_0 A^{\pm} \vec{\Sigma} = -i m \vec{\Sigma} A^{\pm} - \frac{i}{p_0 + m} (\vec{\Sigma} \vec{p}) \vec{p} A^{\pm}$$

Wählen wir wieder unser Koordinatensystem so, daß

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = |\vec{p}|$$

(vgl. S. 10), so lauten die x bzw. y -Komponenten dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} x: \quad & \mp |\vec{p}| A^{\pm} \Sigma^y - i p_0 A^{\pm} \Sigma^x = -i m \Sigma^x A^{\pm} \\ y: \quad & \pm |\vec{p}| A^{\pm} \Sigma^x - i p_0 A^{\pm} \Sigma^y = -i m \Sigma^y A^{\pm} \end{aligned}$$

Subtraktion bzw. Addition der zweiten Gleichung zum i -fachen der ersten liefert:

$$\begin{aligned} (33) \quad & (p_0 \mp |\vec{p}|) A^{\pm} (\Sigma^x + i \Sigma^y) = m (\Sigma^x + i \Sigma^y) A^{\pm} \\ & (p_0 \pm |\vec{p}|) A^{\pm} (\Sigma^x - i \Sigma^y) = m (\Sigma^x - i \Sigma^y) A^{\pm} \end{aligned}$$

⁺ Sie ist natürlich nur bis auf einen gemeinsamen Faktor möglich

Aus der Quantenmechanik des Drehimpulses ist nun bekannt, daß aus den Vertauschungsrelationen (6) folgt:

$$(\Sigma^x \pm i \Sigma^y) |n\rangle = \zeta_{\pm} |n \pm 1\rangle \quad (\zeta_{\pm} \text{ komplexe Zahlen, } |n\rangle \text{ Eigenzustand zu } \Sigma^z)$$

Beachten wir dies, und wenden (33) auf den Zustand $|p \bar{n}\rangle$ an, so folgt:

$$(p_0 \mp |p|) \alpha_{\bar{n}+1}^{\pm} \zeta_{+} |p \bar{n}+1\rangle = m \zeta_{+} \alpha_{\bar{n}}^{\pm} |p \bar{n}+1\rangle$$

$$(p_0 \pm |p|) \alpha_{\bar{n}-1}^{\pm} \zeta_{-} |p \bar{n}-1\rangle = m \zeta_{-} \alpha_{\bar{n}}^{\pm} |p \bar{n}-1\rangle$$

$$\text{bzw.} \quad (p_0 \pm |p|) \alpha_{\bar{n}-1}^{\pm} = m \alpha_{\bar{n}}^{\pm} = (p_0 \mp |p|) \alpha_{\bar{n}+1}^{\pm}$$

Für die $\alpha_{\bar{n}}^{\pm}$ ergibt sich daraus wegen (32):

$$(p_0 \pm |p|) C_{\bar{n}-1}^{\pm} (p_0 + |p|)^{\pm(\bar{n}-1)} = m C_{\bar{n}}^{\pm} (p_0 + |p|)^{\pm \bar{n}} = (p_0 \mp |p|) C_{\bar{n}+1}^{\pm} (p_0 + |p|)^{\pm(\bar{n}+1)}$$

bzw. nach Division durch $(p_0 + |p|)^{\pm \bar{n}}$:

$$(34) \quad \begin{aligned} C_{\bar{n}-1}^{+} &= m C_{\bar{n}}^{+} = m^2 C_{\bar{n}+1}^{+} \\ m^2 C_{\bar{n}-1}^{-} &= m C_{\bar{n}}^{-} = C_{\bar{n}+1}^{-} \end{aligned}$$

Bei der Auswertung von (34) müssen also die Fälle $m \neq 0$ und $m=0$ unterschieden werden.

Wenn $m \neq 0$ ist, so wird (34) durch $C_{\bar{n}}^{\pm} = m^{\mp \bar{n}}$ gelöst und wir können nach (31) und (32) setzen

$$(35) \quad \alpha_{\bar{n}}^{\pm} = \left(\frac{p_0 + |p|}{m} \right)^{\pm \bar{n}} = \sum_{s=0}^{2s} q_s^{\pm} (\bar{n} | p |)^s \quad (\bar{n} = -s, \dots, +s)$$

Dies ist ein System von $2s+1$ Gleichungen für die $q_s^{\pm}(\eta)$, dessen Lösung nach (31) zur Berechnung von $A^{\pm}$ hinreicht. Wie man leicht durch Anwendung auf einen Zustand $|p \bar{n}\rangle$ und Vergleich mit (35) verifiziert, kann man die $A^{\pm}(|p|)$ durch

$$(36) \quad A^{\pm} = e^{\pm \frac{|p|}{m}} \ln \frac{p_0 + |p|}{m}$$

geschlossen ausdrücken. Die Reduktion der darin vorkommenden Potenzen von $(\bar{n} | p |)$ im Sinne von (31) auf die $2s+1$ ersten davon muß für jedes s einzeln vorgenommen werden (vgl. Abschnitt 6). Dieser Ausdruck für $A^{\pm}$ läßt außerdem eine weitere Deutung zu. Auf Grund der Identität:

$$\ln \frac{p_0 + |p|}{m} = \operatorname{arctanh} \frac{|p|}{p_0}$$

und Gleichung (23) gilt:

$$A^{\pm} = e^{i \frac{(\vec{N} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \Theta}$$

($\frac{|\vec{p}|}{\hbar} = u = \tanh \Theta$, u Geschwindigkeitsbetrag). Die Matrix A transformiert also in (25) die Spinkomponenten von $|\vec{p} n\rangle$ vom Ruhssystem, wo sie nach Abschnitt 2 die Spineinstellung direkt festlegen, im Sinne von (15) ins "Laborsystem" (vgl. dazu auch Joos [8])

Wenn $m=0$ ist, so folgt aus (34), daß im Falle (+) nur $C_{\pm s}^{+}$, und im Falle (-) nur C_{-s}^{-} von Null verschieden sein kann. Das gleiche gilt wegen (32) auch für die $\alpha_{\pm s}^{\pm}$. Nach (25) bedeutet dies, daß zu den $|\chi \alpha\rangle$ nur Zustände der Helizität $\pm s$ beitragen können, wenn sie sich nach $D^{(s)}$ transformieren sollen, und nur Zustände der Helizität $-s$, wenn sie sich nach $D^{(0)}$ transformieren sollen. Mit einer lokalen $2s+1$ -komponentigen Theorie obiger Art kann man also im Falle $m=0$ nur Teilchen beschreiben, die in bzw. entgegen der Impulsrichtung die Polarisation s zeigen. Setzen wir insbesondere $C_{\pm s}^{\pm} = \frac{(2s)!}{2^s}$, dh. nach (32):

$$\alpha_{\pm s}^{\pm} = p_0 (2s)!$$

so erhalten wir statt (35):

$$p_0 (2s)! = \sum_{v=0}^{2s} (\pm s | \vec{p} |)^v q_v^{\pm}$$

(37)

$$0 = \sum_{v=0}^{2s} (\mp s | \vec{p} |)^v q_v^{\pm}$$

für $\vec{p} \neq \pm s$

Wie man leicht verifiziert (vgl. S. 19), läßt sich hier $A^{\pm}$ durch

$$(38) \quad A^{\pm} = p_0^s \left(\pm \frac{(\vec{z} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} - s + 1 \right) \cdots \left(\pm \frac{(\vec{z} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} + s \right)$$

geschlossen ausdrücken. Damit ist das Problem des Übergangs zur Ortsdarstellung prinzipiell gelöst. Die lokalen Zustände $|\chi \alpha\rangle$ zeigen dabei für $m \neq 0$ und $m=0$ das gleiche Transformationsverhalten.

Es sei hier noch nachgetragen, daß $A^{\pm}$ die algebraischen Eigenschaften:

$$(39) \quad A^{\pm} (\vec{p}) = A^{\mp} (\vec{p}) \quad \text{und} \quad (40) \quad A^{\pm} A^{\mp} = \begin{cases} 1 & \text{für } m \neq 0 \\ 0 & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

hat. (Vgl. Anhang c). Dies wird im nächsten Abschnitt von Interesse sein.

4. Raumspiegelungen und Feldgleichungen.

Wir wollen uns nun den Raumspiegelungen zuwenden. Das Transformationsverhalten der Zustände $|\vec{p} n\rangle$ läßt sich dabei leicht angeben. Stellen wir die Raumspiegelung durch einen linearen unitären Operator P dar, so gilt:

$$(41) \quad P |\vec{p} n\rangle = |- \vec{p} n\rangle \delta$$

da der Impuls als polarer Vektor das Vorzeichen ändern muß, der Drehimpuls als axialer Vektor aber nicht. δ ist dabei ein Phasenfaktor, für den $\delta^2 = (\pm 1)^{2s}$ gelten muß (vgl. Anhang d). Legen wir nun etwa eine Theorie zugrunde, in der der Übergang zur Ortsdarstellung mit A^+ vollzogen wird, so bekommen wir für die oben eingeführten lokalen Zustände (vgl. (25))

$$(42) \quad |\vec{p} t \alpha +\rangle = \int |\vec{p} n\rangle A_{n\alpha}^+(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\vec{r} - p_0 t)} d\phi$$

das folgende Transformationsverhalten:

$$(43) \quad P |\vec{p} t \alpha +\rangle = \int |- \vec{p} n\rangle \delta \cdot A_{n\alpha}^+(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\vec{r} - p_0 t)} d\phi \\ = \int |\vec{p} n\rangle A_{n\alpha}^+(\vec{p}) e^{-i(-\vec{p}\vec{r} - p_0 t)} d\phi \cdot \delta = |- \vec{p} t \alpha -\rangle$$

da nach (39) $A^+(\vec{p}) = A^-(\vec{p})$ gilt. Da nun die Zustände $|- \vec{p} t \alpha -\rangle$ und $|\vec{p} t \alpha +\rangle$ zu den Darstellungsräumen zweier inäquivalenter Darstellungen ($D^{(s)}$ und $D^{(s_0)}$) der eigentlichen homogenen Lorentzgruppe gehören (vgl. Abschnitt 3), lassen sich die $|- \vec{p} t \alpha -\rangle$ nicht aus den $|\vec{p} t \alpha +\rangle$ linear kombinieren. Dies bedeutet aber gerade, daß sich die Zustände $|\vec{p} t \alpha +\rangle$ bei Raumspiegelungen nicht lokal transformieren.

Die bisherige $2s+1$ komponentige Theorie reicht somit zwar aus, wenn man nur Lokalität bei eigentlichen Lorentztransformationen verlangt, bedarf jedoch einer Erweiterung, wenn sich die Feldgrößen auch bei Raumspiegelungen lokal transformieren sollen. Eine auf der Hand liegende Methode hierzu besteht einfach darin, daß man die $|\vec{p} t \alpha -\rangle$ als neue Feldkomponenten hinzunimmt und somit zu einer $2(2s+1)$ -komponentigen Theorie übergeht. Wegen

$$(44) \quad P |\vec{p} t \alpha +\rangle = |- \vec{p} t \alpha -\rangle \cdot \delta \\ P |\vec{p} t \alpha -\rangle = |- \vec{p} t \alpha +\rangle \cdot \delta \quad (\text{vgl. (43)})$$

kombinieren sich dann die gespiegelten Zustände linear aus den ungespiegelten zum entsprechenden Raumzeitpunkt, d.h. die Raumpiegelung stellt sich lokal dar. Es wird bequem sein, diesen Zusammenhang in Matrixform zu schreiben, indem wir die Zustände stets nach

$$\begin{Bmatrix} |\vec{p} + \alpha + \rangle \\ |\vec{p} + \alpha - \rangle \end{Bmatrix}$$

zu Paaren zusammenfassen. Die durch die Lokalität der Feldoperatoren induzierte Darstellung der homogenen Lorentzgruppe ist dann nach (22) und (23) durch die infinitesimalen Erzeugenden

$$J'_\kappa = \begin{Bmatrix} \Sigma^\kappa & 0 \\ 0 & \Sigma^\kappa \end{Bmatrix}, \quad N'_\kappa = \begin{Bmatrix} -i \Sigma^\kappa & 0 \\ 0 & i \Sigma^\kappa \end{Bmatrix}$$

und die Raumpiegelungsmatrix

$$\pi = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \delta$$

festgelegt. Es wird im folgenden zweckmäßig sein, statt den $|\vec{p} + \alpha \pm \rangle$ ihre Fouriertransformierten

$$(45) \quad |\vec{p} + \alpha \pm \rangle = \frac{\beta}{(2\pi)^3} \int |\vec{p} + \alpha \pm \rangle e^{i(\vec{p} + \alpha - p) \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} = |\vec{p} + \alpha \pm \rangle A_{\alpha \pm}^\pm(\vec{p})$$

(vgl. (42) zu benutzen, da sie sich direkt aus den $|\vec{p} + \alpha \pm \rangle$ zusammensetzen und so leichter zu behandeln sind.

Die $2(2s+1)$ Zustände $|\vec{p} + \alpha \pm \rangle$ können nun natürlich nicht alle linear unabhängig sein, da sie sich aus den $2s+1$ Zuständen $|\vec{p} + \alpha \rangle$ linear kombinieren. Die Bedingungen, die diese lineare Abhängigkeit ausdrücken, werden gerade den Inhalt der Feldgleichungen bilden; letztere sind also durch die $A_{\alpha \pm}^\pm(\vec{p})$ festgelegt.

Im Falle $m \neq 0$ sind alle Eigenwerte $\alpha_\pm^\pm$ der $A_{\alpha \pm}^\pm(\vec{p})$ von Null verschieden, die $A_{\alpha \pm}^\pm(\vec{p})$ liefern also einen umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen den $|\vec{p} + \alpha \pm \rangle$ und den $|\vec{p} + \alpha \rangle$. Darin drückt sich die einfache Tatsache aus, daß bei $m \neq 0$ bereits eines der Systeme $|\vec{p} + \alpha + \rangle$ oder $|\vec{p} + \alpha - \rangle$ zum Aufbau des Zustandsraumes ausreicht, d.h. daß ein Spin- s -Teilchen schon durch eine $2s+1$ -komponentige Theorie vollständig beschrieben werden kann. Der Übergang von den $|\vec{p} + \alpha + \rangle$ zu den $|\vec{p} + \alpha - \rangle$ entspricht somit einfach einem Basiswechsel, der durch eine feste, für das Teilchen charakteristische Transformation geleistet wird. Für die Fouriertransformierten der lokalen Zustände $|\vec{p} + \alpha + \rangle$ und $|\vec{p} + \alpha - \rangle$ läßt sie sich leicht angeben. Nach (40)

und (45) gilt

$$A^{-1}(\vec{p}) | \vec{p} \alpha + \rangle = | \vec{p} \alpha - \rangle, \quad A^{+1}(\vec{p}) | \vec{p} \alpha - \rangle = | \vec{p} \alpha + \rangle$$

bzw. in der obigen Matrixschreibweise

$$(46) \quad \left\{ \begin{pmatrix} A^{-1}(\vec{p}) & 0 \\ 0 & A^{+1}(\vec{p}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} | \vec{p} \alpha + \rangle \\ | \vec{p} \alpha - \rangle \end{Bmatrix} = 0$$

Diese Beziehung geht bei Rücktransformation zum Ortsraum offensichtlich in eine Feldgleichung für $\begin{Bmatrix} | F t \alpha + \rangle \\ | F t \alpha - \rangle \end{Bmatrix}$ über, wobei nach (42) überall $\vec{p}$ durch $-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ und p_0 durch $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ zu ersetzen ist⁺. Die Feldgleichungen stellen also hier lediglich den Zusammenhang zwischen den $| F t \alpha + \rangle$ und den an und für sich überzähligen Feldkomponenten $| F t \alpha - \rangle$ her.

Im Falle $m=0$ liegen die Verhältnisse etwas anders. Da bei A^{+} nur der höchste Eigenwert α_{+s}^{+} und bei A^{-} nur der niedrigste α_{-s}^{-} von Null verschieden ist, sind die $| \vec{p} \alpha + \rangle$ Vielfache von $| \vec{p} \vec{r}_3 \rangle$ und die $| \vec{p} \alpha - \rangle$ Vielfache von $| \vec{p} \vec{r}_3 \rangle$. Im Gegensatz zu $m \neq 0$ sind also hier einerseits die $| \vec{p} \alpha + \rangle$ untereinander linear abhängig, zum andern lassen sich die $| \vec{p} \alpha - \rangle$ nicht aus ihnen linear kombinieren (entsprechendes gilt für die $| \vec{p} \alpha - \rangle$). Die Folge davon ist, daß die Zustände $| F t \alpha + \rangle$ zur Helizität $+s$ und die $| F t \alpha - \rangle$ zur Helizität $-s$ gehören, also im Gegensatz zu $m \neq 0$ zwei sich physikalisch ausschließende Sachverhalte beschreiben. Für ihre Fouriertransformierten bedeutet dies nach (vgl. Anhang c) und Gl. (45)

$$(47) \quad \left\{ \frac{1}{s} \begin{pmatrix} i \vec{\Sigma} \vec{p} & 0 \\ 0 & i \vec{\Sigma} \vec{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} | F t \alpha + \rangle \\ | F t \alpha - \rangle \end{Bmatrix} = 0$$

Diese Gleichung geht wie im Falle $m \neq 0$ bei Rücktransformation in den Ortsraum in eine entsprechende Feldgleichung für die $\begin{Bmatrix} | F t \alpha + \rangle \\ | F t \alpha - \rangle \end{Bmatrix}$ über. Sie sagt hier aus, daß man mit einer $2s+1$ -kom-

⁺ Es gilt $-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} e^{-i \vec{r} \cdot \vec{p}} = \vec{p} e^{-i \vec{r} \cdot \vec{p}}$ und $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} e^{-i p t} = p_0 e^{-i p t}$

ponentigen Theorie obiger Art nur einen Polarisationszustand des Spin s Teilchens, und zwar den mit paralleler oder den mit antiparalleler Orientierung von Spin und Impuls beschreiben kann. Beim Übergang zur raumspiegelungsinvarianten Theorie hat man wieder diese beiden Anteile zu vereinigen.

5. Übergang zur Vielteilchentheorie und Hinzunahme der Antiteilchen. - Die diskreten Symmetrien.

Der Übergang von der Einteilchen- zur Vielteilchentheorie wird vollzogen, indem man den Einteilchenraum durch die direkte Summe seiner symmetrisierten bzw. antisymmetrisierten Produkträume (Teilräume zu fester Teilchenzahl) ersetzt. Die mathematische Formulierung des Sachverhalts gelingt bekanntlich durch die Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\vec{p}}^{\dagger}(\vec{p})$, $a_{\vec{p}}(\vec{p})$, die Teilchen in den Zuständen $a_{\vec{p}}^{\dagger}(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p}\rangle$ erzeugen bzw. vernichten, und - je nachdem, ob die Teilchen der Bose- oder der Fermistatistik gehorchen - den Vertauschungsrelationen

$$(48) \quad a_{\vec{p}}(\vec{p}) a_{\vec{p}'}^{\dagger}(\vec{p}') \mp a_{\vec{p}'}^{\dagger}(\vec{p}') a_{\vec{p}}(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

genüger⁺. Für ganzzahligen Spin kommen die Kommutatoren, für halbzahligen Spin die Antikommutatoren in Frage (vgl. Pauli [2] sowie Lüders und Zumino [3]; es wird dabei wesentlich benutzt, daß die Energie positiv definit sein soll).

Für unsere Zwecke ist es vorteilhaft, von den in Abschnitt 2 behandelten Eigenzuständen $|\vec{p}, n\rangle$ des Operators Σ^z auszugehen. Nach (2a) und (48) folgt dann

$$(49) \quad a_n(\vec{p}) a_n^{\dagger}(\vec{p}') \mp a_n^{\dagger}(\vec{p}') a_n(\vec{p}) = \delta_{nn'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') p_0$$

wobei $a_n^{\dagger}(\vec{p})$ Teilchen mit scharfem Σ^z und Impuls erzeugt. Die Erzeugungsoperatoren für Teilchen mit scharfer Helizität berechnen

⁺Das obere Vorzeichen gilt für die Bose-, das untere für die Fermistatistik.

sich nach (7) gemäß:

$$a_n^\dagger(\vec{p}) = a_m^\dagger(p) U_{mn}(\vec{p})$$

aus ihnen und können natürlich ebenfalls zum Aufbau des Vielteilchenraums verwandt werden.

Wir müssen außerdem noch berücksichtigen, daß es zu bestimmten Teilchen Antiteilchen gibt, die zwar gleiche Masse und Spin haben, sich jedoch bei bestimmten Wechselwirkungen von ersteren unterscheiden. Man beschreibt sie durch einen zweiten Satz von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b_n^\dagger(\vec{p})$, $b_n(\vec{p})$ die untereinander die gleichen Eigenschaften wie die $a^\dagger, a$ zeigen, d.h. den Vertauschungsrelationen

$$(49a) \quad b_n(\vec{p}) b_n^\dagger(\vec{p}') \mp b_n^\dagger(\vec{p}') b_n(\vec{p}) = \delta_{nn'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \rho_0$$

genügen und mit allen a -Operatoren kommutieren bzw. antikommutieren. In der Ortsdarstellung läßt sich diese Verdoppelung der Freiheitsgrade durch Übergang zu nichtthermischen Feldern ψ beschreiben, indem man ansetzt⁺

$$(50) \quad \psi_n^\dagger(x) = \int [a_n^\dagger(\vec{p}) A_{nn}(x|\vec{p}) + b_n(\vec{p}) B_{nn}(x|\vec{p})] d\sigma$$

Dadurch erreicht man, daß der Ladungsoperator Q mit dem Erzeuger von infinitesimalen Phasentransformationen übereinstimmt⁺⁺. Setzen wir nämlich etwa für die a -Teilchen die Ladung $+1$ und für die b -Teilchen die Ladung -1 an, so überlegt man sich leicht (vgl. Anhang f), daß Q den Vertauschungsrelationen

$$[Q, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [Q, b] = b$$

⁺ Hierin liegt natürlich eine gewissen Beschränkung der Allgemeinheit vor, da zunächst auch Terme mit $a^\dagger$ und b zulässig wären.

⁺⁺ Wenn, wie etwa beim π -Meson, drei Ladungszustände auftreten, so verwendet man statt $\psi^\dagger, \psi$ auch oft $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^\dagger)$, $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^\dagger)$, um eine symmetrische Behandlung der drei Achsen im Isospinraum zu erreichen.

genügen muß, und somit nach (50) auch

$$[Q, \psi^+] = \psi^+$$

erfüllt. Daraus folgt sofort $e^{i\psi Q} \psi^+ e^{-i\psi Q} = e^{i\psi} \psi^+$

Der Ansatz (50) ist außerdem offenbar die einfachste Realisierung der Bedingung, daß sich die Zustände $a_n^+(\vec{p})|0\rangle$, $b_n^+(\vec{p})|0\rangle$ rückwärts aus den $\psi_a^+(x)|0\rangle$, $\psi_b(x)|0\rangle$ linear kombinieren lassen, also beim Übergang zur Ortsdarstellung keine Information über den physikalischen Sachverhalt verloren geht.

Die Koeffizienten $A_n(x, \vec{p})$ und $B_n(x, \vec{p})$ lassen sich wieder aus der Bedingung bestimmen, daß sich die $\psi_a^+(x)$ bzw. $\psi_b(x)$ bei Lorentztransformationen L lokal, d.h. nach

$$(51a) \quad U(L) \psi_a^+(x) U(L)^\dagger = \psi_a^+(x) h_{\beta\alpha}(L)$$

bzw.

$$(51b) \quad U(L) \psi_b(x) U(L)^\dagger = \psi_b(x) h_{\beta\alpha}^*(L)$$

transformieren sollen. Vgl. (17). Wenden wir Gl. (51a) auf den Zustand $|0\rangle$ an, so geht sie direkt in (17) über. Die $A_n(x, \vec{p})$ aus (50) sind also mit denen aus Abs. 3 (bis auf einen konstanten Faktor, den wir hier gleich 1 setzen) identisch. Die Anwendung von (51b) auf $|0\rangle$ liefert dagegen unter Beachtung von (50)

$$\psi_b(x) h_{\beta\alpha}^*(L) = \int U(L) b_n^+(\vec{p}) |0\rangle B_n^*(x, \vec{p}) d\theta$$

Der Vergleich mit (17) zeigt nun, daß sich die B_n^* auf die gleiche Weise wie die A_n berechnen lassen, wenn man nur überall $h_{\beta\alpha}$ durch $h_{\beta\alpha}^*$ ersetzt. Danach folgt analog zu (24) sofort

$$(52) \quad B_n^*(x, \vec{p}) = e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} B_n^+(\vec{p})$$

Man verfolgt ferner leicht zurück, daß dem Übergang $h_{\beta\alpha} \rightarrow h_{\beta\alpha}^*$ auf der linken Seite von (28) die Substitution $\sum^{\alpha} \rightarrow -\sum^{\alpha*}$

und auf der linken Seite von (29) die Substitution $\Sigma^k \rightarrow \Sigma^{k*}$ entspricht. $B^*(\vec{p})$ genügt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} -iB^* \vec{\Sigma}^* - \vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} B^* &= i \vec{\Sigma} B^* \\ \pm B^* \vec{\Sigma}^* - p_0 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} B^* &= \frac{L}{p_0 + m} (\vec{\Sigma} \times \vec{p}) B^* \end{aligned}$$

Durch Übergang zum konjugiert komplexen folgt daraus

$$(53) \quad i B \vec{\Sigma} - \vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} B = i (-\vec{\Sigma}^*) B$$

$$(54) \quad \pm B \vec{\Sigma} - p_0 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} B = \frac{L}{p_0 + m} (-\vec{\Sigma}^* \times \vec{p}) B$$

Die $-\Sigma^{k*}$ sind nun wie die Σ^k $2s+1$ -reihige Matrizen, die den Drehimpulsvertauschungsrelationen (6) genügen. Sie können also ebenfalls als Erzeuger einer $2s+1$ -dimensionalen irreduziblen unitären Darstellung der räumlichen Drehgruppe aufgefaßt werden. Da nun alle derartigen Darstellungen unitär äquivalent sind, existiert eine unitäre Matrix τ , die

$$(55) \quad -\Sigma^{k*} = \tau \Sigma^k \tau^\dagger$$

leistet. (Vgl. Anhang e). Berücksichtigen wir dies und multiplizieren (53) und (54) von links mit $\tau^\dagger$, so folgt:

$$\begin{aligned} i(\tau^\dagger B) \vec{\Sigma} - \vec{p} \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} (\tau^\dagger B) &= i \vec{\Sigma} (\tau^\dagger B) \\ \pm (\tau^\dagger B) \vec{\Sigma} - p_0 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} (\tau^\dagger B) &= \frac{i}{p_0 + m} (\vec{\Sigma} \times \vec{p}) (\tau^\dagger B) \end{aligned}$$

Die Matrix $\tau^\dagger B$ genügt also den Gleichungen (28) und (29) und muß somit ein Vielfaches der Matrix A sein:

$$\tau^\dagger B^\pm = \eta_\pm A^\pm$$

Beachten wir weiter, daß sich A aus Potenzen von $(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})$ mit reellen Koeffizienten zusammensetzt, und deshalb $\tau A^\dagger \vec{p} / \tau^\dagger = A^\dagger (-\vec{p}) = A^\dagger (\vec{p})$ gilt, so folgt daraus für B :

$$(56) \quad B^{\pm} = \eta_{\pm} \tau A^{\pm} = \eta_{\pm} A^{\mp \dagger} \tau$$

Gleichung (50) geht damit in:

$$(57) \quad \psi_{\mu\alpha}(x) = \int [a_n^+(\vec{p}) A_{n\alpha}^+(\vec{p}) e^{-ipx} + \eta_{\pm} b_n(\vec{p}) (\tau A_n^{\dagger}(\vec{p}))_{m\alpha} e^{ipx}] d\vec{p}$$

über. Damit ist prinzipiell auch das Problem des Übergangs zur Ortsdarstellung für die Vielteilchensysteme gelöst.

Fordern wir zunächst nur wieder Lokalität bei eigentlichen Lorentztransformationen, so können wir uns wie in Abs.3 mit einer 2s+1-komponentigen Theorie, d.h. entweder mit $\psi_{\mu}(x)$ oder mit $\psi_{\mu}(x)$ begnügen und $\eta_{\pm}$ gleich 1 setzen.

Lokalität auch bei Raumspiegelungen erreichen wir wieder durch Vereinigung von $\psi_{\mu}(x)$ und $\psi_{\mu}(x)$ zu einem $2(2s+1)$ -komponentigen Feldoperator:

$$(58) \quad \begin{pmatrix} \psi_{\mu\alpha}(x) \\ \psi_{\mu\alpha}(x) \end{pmatrix}^{\dagger} = \int \left[a_n^+(\vec{p}) \begin{pmatrix} A_{n\alpha}^+(\vec{p}) \\ A_{n\alpha}^-(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-ipx} + b_n(\vec{p}) \tau_{mn} \begin{pmatrix} \eta_+ A_{n\alpha}^+(\vec{p}) \\ \eta_- A_{n\alpha}^-(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{ipx} \right] d\vec{p}$$

Die Feldgleichungen müssen dabei allerdings wegen des Hinzutretens des zu e^{ipx} gehörigen Anteils neu diskutiert werden, da er eine andere Ortsabhängigkeit zeigt. Damit $\psi_{\mu}^{\dagger}(x)$ den entsprechend zu (46) und (47) gebildeten Feldgleichungen:

$$(59) \quad \left[\begin{pmatrix} A^2 - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & A^2 - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}_{\alpha\beta} - \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\alpha\beta} \\ \delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_{\mu\alpha}(x) \\ \psi_{\mu\alpha}(x) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } m \neq 0$$

bzw.

$$(60) \quad \left[-\frac{1}{i^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & -(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right] \begin{pmatrix} \psi_{\mu\alpha}(x) \\ \psi_{\mu\alpha}(x) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } m=0$$

genügt, muß für die Koeffizienten $\eta_{\pm} A_{n\alpha}^{\dagger}$ dieses Anteils gelten (vgl.(58)):

$$\begin{pmatrix} \eta_+ A^+(\vec{p}, p_0) \\ \eta_- A^-(\vec{p}, p_0) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}_0 & 0 \\ 0 & A^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \eta_+ A^+(\vec{p}, p_0) \\ \eta_- A^-(\vec{p}, p_0) \end{pmatrix} \left[\frac{1}{i} \begin{pmatrix} -(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) & 0 \\ 0 & (\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) \end{pmatrix} + p_0 \right] = 0$$

da bei der Ortsabhängigkeit $e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ die Operatoren $-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}$ bzw. $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}$ statt durch $\vec{p}$, $\vec{p}$ durch $-\vec{p}$ und $-\vec{p}$ zu ersetzen sind (vgl. Fußnote S. 23). Die zweite dieser Gleichungen ist wegen $A^{\pm}(\pm\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} - \epsilon) = 0$ (vgl. Anhang c) für beliebige $\eta_{\pm}$ erfüllt, der Vorzeichenwechsel von $\vec{p}$ und $\vec{p}_0$ fällt hier also nicht ins Gewicht. Die erste lautet ausgeschrieben:

$$\eta_+ A^+(\vec{p}, R) A^{-}(-\vec{p}, -\vec{p}_0) = \eta_- A^{-}(\vec{p}, \vec{p}_0)$$

$$\eta_- A^{-}(\vec{p}, \vec{p}_0) A^{+}(-\vec{p}, -\vec{p}_0) = \eta_+ A^{+}(\vec{p}, \vec{p}_0)$$

Wegen $A^{\pm}(-\vec{p}, -\vec{p}_0) = (-1)^{2s} A^{\pm}(\vec{p}, \vec{p}_0)$ (vgl. Anhang c) und (40)

$$\text{folgt daraus: } \eta_+ (-1)^{2s} = \eta_- \quad , \quad \eta_- (-1)^{2s} = \eta_+$$

Die Feldgleichungen (59) und (60) werden also insbesondere erfüllt, wenn wir einfach $\eta_+ = 1$, $\eta_- = (-1)^{2s}$ setzen. Als Feldoperator bekommen wir dann nach (58)

$$(61) \quad \begin{pmatrix} \psi_{\mu}(x) \\ \psi_{\mu}(x) \end{pmatrix} = \int \left[a_{\mu} \begin{pmatrix} A_{\mu\alpha}^+ \\ A_{\mu\alpha}^- \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\mu} \tau_{\mu\alpha} \begin{pmatrix} A_{\mu\alpha}^+ \\ A_{\mu\alpha}^- \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] d\sigma$$

und als Feldgleichungen (59) und (60).

Wir wollen abschließend das Verhalten der Feldoperatoren bei Ladungskonjugationen, Raumspiegelungen und Zeitspiegelungen untersuchen. Soll dabei das Skalarprodukt ungeändert bleiben, so müssen wir diese Operationen durch unitäre oder antiunitäre Operatoren darstellen. Ihre Wirkung läßt sich am leichtesten an den Operatoren $a_{\mu}^{\dagger}, b_{\mu}^{\dagger}$ ablesen, da diese eine einfache physikalische Bedeutung haben. Weiterhin ist es zur Diskussion des Transformationsverhaltens des Feldoperators bequem, die rechte Seite von (61) mit (56) umzuformen und die Spinindizes künftig wegzulassen⁺:

$$(62) \quad \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}^{\dagger} = \int \left[a^{\dagger}(\vec{p}) \begin{pmatrix} A^{\dagger}(\vec{p}) \\ A^{\dagger}(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b(\vec{p}) \begin{pmatrix} A^{\dagger}(\vec{p}) \\ A^{\dagger}(\vec{p}) \end{pmatrix} \tau e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] d\sigma$$

Wir beginnen mit der Ladungskonjugation C . Sie entspricht der Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen. Für die Operatoren $a^{\dagger}$ und b bedeutet dies:

⁺ Die rechts von den Operatoren $a^{\dagger}$ und b stehenden Größen A und τ sind jetzt als Matrizen aufzufassen.

$$C a_n^+ C^\dagger = b_n^+ \quad , \quad C b_n C^\dagger = a_n$$

Wählen wir C unitär, so folgt damit für den Feldoperator

$$C \begin{pmatrix} \psi_H(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix} C^\dagger = \int [b^+ \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} e^{-ipx} + a \begin{pmatrix} A^{+*} \\ A^{+*} \end{pmatrix} \tau e^{ipx}] d\sigma$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \psi_H(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix} = \int [b^+ \begin{pmatrix} A^- \\ A^+(-1)^{2s} \end{pmatrix} \tau e^{-ipx} + a \begin{pmatrix} A^{+*} \\ A^{+*} \end{pmatrix} e^{ipx}] d\sigma$$

und $\tau \tau^\dagger = (-1)^{2s}$ (vgl. Anhang e) entspricht der Ladungskonjugation also die lokale Transformation

$$C \begin{pmatrix} \psi_H(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix} C^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{2s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_H(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix} \tau$$

Bei Raumspiegelungen P gilt nach (41)

$$P a_n^+(\vec{p}) |0\rangle = a_n^+(-\vec{p}) |0\rangle \delta_n \quad , \quad P b_n^+(\vec{p}) |0\rangle = b_n^+(-\vec{p}) |0\rangle \delta_n$$

Um für $\psi(x)$ ein einfaches Transformationsverhalten zu erreichen wird es sich als zweckmäßig erweisen, die Phasenfaktoren

$\delta_n = i^{2s} = \delta_n$ zu wählen (sie erfüllen die in Abschnitt 4 erwähnte notwendige Bedingung $(\pm 1)^{2s} = \delta^2$) für die Operatoren $a^\dagger$ und b bedeutet dies:

$$P a_n^+(\vec{p}) P^\dagger = i^{2s} a_n^+(-\vec{p}) \quad , \quad P b_n(\vec{p}) P^\dagger = (-1)^{2s} i^{2s} b_n(-\vec{p})$$

Wählen wir nun auch P unitär, so folgt nach (39) und (62)

für $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} \psi_H(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix} P^\dagger &= i^{2s} \int [a^\dagger(-\vec{p}) \begin{pmatrix} A^+(\vec{p}) \\ A^-(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}\vec{r}-pt)} + b(-\vec{p}) \begin{pmatrix} A^+(\vec{p}) \\ A^-(\vec{p}) \end{pmatrix} (-1)^{2s} \tau e^{i(\vec{p}\vec{r}-pt)}] d\sigma \\ &= i^{2s} \int [a^\dagger(\vec{p}) \begin{pmatrix} A^-(\vec{p}) \\ A^+(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-i(1-\vec{p}\vec{r}-pt)} + b(\vec{p}) \begin{pmatrix} A^+(\vec{p}) \\ A^-(\vec{p}) \end{pmatrix} (-1)^{2s} \tau e^{i(1-\vec{p}\vec{r}-pt)}] d\sigma \\ &= i^{2s} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_H(-\vec{r}, t) \\ \psi_L(-\vec{r}, t) \end{pmatrix}^\dagger \end{aligned}$$

(Vgl. dazu (44))

Bei Zeitspiegelungen T muß beachtet werden, daß T zum einen mit dem infinitesimalen Erzeuger von Zeittranslationen $-iP_0$ (P_0 Hamiltonoperator) antikommutiert, andererseits aber mit P_0 kommutieren muß, wenn die Energie positiv definit sein soll. Die Erfüllung dieser beiden Bedingungen gelingt bekanntlich dadurch, daß man T antiunitär wählt (vgl. auch Grawert, Lüders, Rollnik [14]). Da die Zeitspiegelung andererseits mit den infinitesimalen Erzeugenden von räumlichen Drehungen bzw. Translationen $-i\vec{J}$ bzw. $-i\vec{P}$ kommutiert, führt der antiunitäre Charakter des Operators T dazu, daß er mit $\vec{P}$ und $\vec{J}$ antikommutiert. Er führt also Zustände mit scharfem Impuls bzw. Drehimpuls in solche mit Eigenwerten entgegengesetzten Vorzeichens über. Man macht sich nun leicht klar (vgl. Anhang e), daß man auf Grund dieser Eigenschaften anzusetzen hat

$$T |\vec{p} n\rangle = |-\vec{p} m\rangle T_{mn}^*$$

Für die Operatoren a_n^+, b_n bedeutet dies (bis auf Phasenfaktoren, die wir der Einfachheit halber gleich 1 setzen)

$$T a_n^+(\vec{p}) T^\dagger = a_m^+(-\vec{p}) T_{mn}^*, \quad T b_n(\vec{p}) T^\dagger = b_m(-\vec{p}) T_{mn}$$

Damit folgt unter Benutzung der Antiunitarität von T und Gl. (56) nach (62):

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} \psi_H(x) \\ \psi_H(y) \end{pmatrix} T^\dagger &= \int [a^\dagger(-\vec{p}) \tau^* \begin{pmatrix} A^+(\vec{p}) \\ A^-(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\vec{r}-p_0t)} + b(-\vec{p}) \tau \begin{pmatrix} A^-(\vec{p}) \\ A^+(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}\vec{r}-p_0t)}] d\vec{p} \\ &= \int [a^\dagger(\vec{p}) \begin{pmatrix} A^+(\vec{p}) \\ A^-(\vec{p}) \end{pmatrix} \tau^* e^{-i(\vec{p}\vec{r}+p_0t)} + b(\vec{p}) \begin{pmatrix} A^-(\vec{p}) \\ A^+(\vec{p}) \end{pmatrix} \tau \tau^* e^{i(\vec{p}\vec{r}+p_0t)}] d\vec{p} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_H(\vec{r}_1-t) \\ \psi_H(\vec{r}_2-t) \end{pmatrix}^* \tau^* \end{aligned}$$

Der Feldoperator (62) transformiert sich also bei der obigen Wahl der verschiedenen Phasenfaktoren unter allen drei Symmetrieeoperationen C , P und T lokal. Das Transformationsverhalten der

Operatoren a^+ , b und ψ^+ ist in der folgenden Tabelle noch einmal kurz zusammengestellt:

U	$U a_n^+(\vec{p}) U^+$	$U b_n(\vec{p}) U^+$	$U \begin{pmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n(-x) \end{pmatrix}^+ U^+$
C	$b_n^T(\vec{p})$	$a_n(\vec{p})$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n(-x) \end{pmatrix}^T$
P	$i^{2s} a_n^+(\vec{p})$	$(-i)^{2s} b_n(\vec{p})$	$i^{2s} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n(\vec{p}t) \\ \psi_n(-\vec{p}t) \end{pmatrix}^+$
T	$a_m^+(\vec{p}) \tau_{mn}^+$	$b_m(\vec{p}) \tau_{mn}$	$\begin{pmatrix} \psi_n(\vec{p}-t) \\ \psi_n(\vec{p}+t) \end{pmatrix}^+ \tau^+$
$TC P$	$(-i)^{2s} b_m^+(\vec{p}) \tau_{mn}^+$	$i^{2s} a_m(\vec{p}) \tau_{mn}$	$i^{2s} \begin{pmatrix} (-1)^{2s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n(-x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}^+$

6. Die einzelnen Theorien.

Wir wollen jetzt die Felder $s=0, 1/2, 1$ im einzelnen diskutieren. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber wieder auf die Einteilchenzustände $|\phi\rangle$ der a -Teilchen. Weiterhin wollen wir von den Zuständen zu den Wellenfunktionen übergehen, um Anschluß an die mehr übliche Formulierung zu erhalten. Wir definieren (vgl.

$$(45)) : \quad \phi_n(\vec{p}) = \langle \vec{p} | n | \phi \rangle, \quad \phi_{2n}(\vec{p}) = \langle \vec{p} | 2n | \phi \rangle, \quad \phi_{2n}(x) = \langle x | 2n | \phi \rangle$$

$$(63) \quad = \langle 0 | a_n(\vec{p}) | \phi \rangle \quad = \langle 0 | \psi_n^{(0)} | \phi \rangle$$

Es folgt dann wegen (45) und (42):

$$\phi_{2n\alpha}^*(\vec{p}) = \phi_m^*(\vec{p}) A_{m\alpha}^{\pm}(\vec{p}), \quad \phi_{2n\alpha}^*(x) = \int \phi_{2n\alpha}^*(\vec{p}) e^{-ipx} d\sigma$$

bzw. nach Übergang zum konjugiert komplexen und unter Beachtung von $A_{m\alpha}^{\pm*} = A_{m\alpha}^{\pm}$:

$$(64) \quad \phi_{2n\alpha}(\vec{p}) = A_{m\alpha}^{\pm} \phi_m(\vec{p}), \quad \phi_{2n\alpha}(x) = \int A_{m\alpha}^{\pm}(\vec{p}) \phi_m(\vec{p}) e^{ipx} d\sigma$$

Das Verhalten der lokalen Wellenfunktionen $\phi_{2n\alpha}$ bei Lorentztrans-

formationen L ist durch

$$\phi'_\alpha(x) = \langle x | U(L) | \phi \rangle$$

bestimmt*. Wegen $U^\dagger(L) = U(L^{-1})$ folgt daraus $\phi'^*_\alpha(x) = \langle \phi | U(L^{-1}) | x \rangle$

Das Transformationsverhalten der $|x\rangle$ ist nun nach (17) bekannt.

Es gilt $U(L^{-1}) | x \rangle = | L^{-1}x \rangle = h_{\rho\alpha}(L^{-1})$, dh.

$$\phi'^*_\alpha(x) = \phi^*_\rho(L^{-1}x) h_{\rho\alpha}(L^{-1})$$

und deshalb

$$(65) \quad \phi'_\alpha(x) = h^*_{\rho\alpha}(L^{-1}) \phi_\rho(x') \quad (x' = L^{-1}x)$$

Bei infinitesimalen Raumdrehungen $\delta \vec{a}$ bzw. Lorentztransformationen $\delta \vec{a}$ gilt nun $L(\delta \vec{a}) = L(-\delta \vec{a})$, $L^{-1}(\delta \vec{a}) = L(-\delta \vec{a})$ und damit nach (19), (20) und (22), (23) sowie $\Sigma^{\kappa\alpha}_{\rho\mu} = \Sigma^{\kappa}_{\alpha\rho}$:

$$h^*_{\rho\alpha}(L^{-1}) = (\delta_{\rho\alpha} + i(\delta \vec{a} \vec{J})'_{\rho\alpha})^* = (1 - i(\delta \vec{a} \vec{\Sigma})_{\alpha\rho})$$

(66) bzw.

$$h_{\rho\alpha}(L^{-1}) = (\delta_{\rho\alpha} + i(\delta \vec{a} \vec{N})'_{\rho\alpha})^* = (1 \pm i(\delta \vec{a} \vec{\Sigma})_{\alpha\rho})$$

Dadurch ist das Transformationsverhalten der $\phi_{\alpha}(x)$ nach (65) festgelegt. Zwischen $m \neq 0$ und $m=0$ braucht dabei nicht unterschieden zu werden.

Zur Herleitung der Feldgleichungen für $\phi_\alpha(x)$ multiplizieren wir (59) und (60) von links mit $\langle \phi |$ und von rechts mit $|0\rangle$

und gehen anschließend zum konjugiert komplexen über. Es folgt dann

$$(67) \quad \left[\left(A^{-1} \left(i \frac{\partial}{\partial t}, i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right)_{mn} \right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 & \delta_{mn} \\ \delta_{mn} & 0 \end{smallmatrix} \right) \right] \left(\begin{smallmatrix} \phi_{Hn}(x) \\ \phi_{Tn}(x) \end{smallmatrix} \right) = 0 \quad \text{für } m \neq 0$$

bzw.

$$(68) \quad \left[\frac{1}{i\delta} \left(\vec{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right)_{mn} \right] - i \frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{smallmatrix} \phi_{Hn}(x) \\ \phi_{Tn}(x) \end{smallmatrix} \right) = 0 \quad \text{für } m=0$$

* Es wird hier der Zustand $|\phi\rangle$ transformiert, jedoch die alte Basis $|x\rangle$ beibehalten; die Lorentztransformation wird also hier als Transformation des physikalischen Systems in einem festen Bezugssystem aufgefaßt.

(Diese beiden Gleichungen lassen sich auch direkt aus (64) able-
sen)

Es ist für die einzelnen Theorien noch von Interesse, das Skalar-
produkt zweier Einteilchenzustände durch die Wellenfunktionen
(63) auszudrücken. Nach (2a) gilt zunächst

$$(69) \quad \langle \phi | \chi \rangle = \int \langle \phi | \vec{p} n \rangle \langle \vec{p} n | \chi \rangle d\sigma = \int \phi_n^*(\vec{p}) \chi_n(\vec{p}) d\sigma$$

Ist insbesondere $m \neq 0$, so folgt daraus wegen (40) sowie (64) und

(45)*:

$$(70) \quad \begin{aligned} \langle \phi | \chi \rangle &= \int \phi_{(k)n}^*(\vec{p}) \chi_{(k)n}(\vec{p}) d\sigma = \frac{i}{2} \frac{1}{(4\pi)^3} \int \phi_{(k)n}^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \chi_{(k)n}(x) d^3x \\ &= \frac{i}{4} \frac{1}{(4\pi)^3} \int \left[\phi_{(k)n}^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \chi_{(k)n}(x) + \phi_{(-k)n}^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \chi_{(-k)n}(x) \right] d^3x \end{aligned}$$

Im Falle $m=0$ lassen sich aus den $|k, \pm\rangle$, $|\vec{p}, \pm\rangle$ nur Zustände der
Helizität $\pm s$, dh. Vielfache der $|\vec{p}, \pm s\rangle$ rückwärts linear kombi-
nieren (vgl. Abschnitt 3). Das Skalarprodukt läßt sich dann im all-
gemeinen nicht durch die $\phi_{(k)n}$, $\phi_{(-k)n}$ ausdrücken.

a. Skalartheorie.

Bei der skalaren Theorie ($s=0$) transformieren sich die Fourier-
transformierten der Zustände scharfen Impulses

$$(71) \quad |x\rangle = \int |\vec{p}\rangle e^{-ipx} d\sigma$$

automatisch sowohl unter der eigentlichen Lorentzgruppe als auch
unter Spiegelungen lokal, so daß hier der Übergang zur Ortsdar-
stellung trivial ist und keine Verdoppelung der Feldkomponenten
vorgenommen werden braucht. Als Feldoperator haben wir nach (71)
gemäß Abschnitt 5 anzusetzen

$$\psi(x) = \int [a(\vec{p}) e^{-ipx} + b(\vec{p}) e^{ipx}] d\sigma$$

Er genügt offenbar der Klein-Gordon Gleichung, die hier lediglich
die Forderung $p_\mu p^\mu = m^2$ ausdrückt.

$$+ \quad \frac{\partial}{\partial t} g = \frac{\partial}{\partial t} g - g \frac{\partial}{\partial t} f$$

b. Spin 1/2 Theorie

Für $s=1/2$ können die Σ^k bis auf den Faktor $1/2$ mit den drei Paulimatrizen σ_k identifiziert werden

$$\Sigma^k = \frac{1}{2} \sigma_k$$

Diese haben bekanntlich die zusätzliche Eigenschaft
bzw. ⁺

$$(72) \quad \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{p^2} = 1$$

Wir beginnen mit dem Fall $m \neq 0$. Nach (36) folgt unter Benutzung von (72)

$$\begin{aligned} A^{\pm} &= \cosh\left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \ln\left(\frac{p_0 + |\vec{p}|}{m}\right)\right) \pm \sinh\left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \ln\left(\frac{p_0 + |\vec{p}|}{m}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{p_0 + |\vec{p}|}{m}} + \sqrt{\frac{m}{p_0 + |\vec{p}|}} \right\} \pm \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{2|\vec{p}|} \left\{ \sqrt{\frac{p_0 + |\vec{p}|}{m}} - \sqrt{\frac{m}{p_0 + |\vec{p}|}} \right\} \\ (73) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\sqrt{p_0 + m} \pm \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \sqrt{p_0 - m} \right) \\ A^{\pm 2} &= \frac{1}{m} (p_0 \pm (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})) \end{aligned}$$

Beschränken wir uns zunächst wieder auf ein $2s+1=2$ -komponentiges Feld, etwa ϕ_1 , so folgt mit (73)

$$(74) \quad \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\sqrt{p_0 + m} + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \sqrt{p_0 - m} \right) \phi_1(\vec{p}) e^{ipx} d\sigma.$$

Die Wellenfunktion $\phi_1(x)$ transformiert sich dabei gemäß (66) bei infinitesimalen Raumdrehungen $\delta \vec{x}$ mit $(1 - \frac{1}{2}(\delta \vec{x} \cdot \vec{\sigma}))$ und bei infinitesimalen Lorentztransformationen $\delta \vec{u}$ mit $(1 + \frac{1}{2}(\delta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}))$.

Zur Darstellung des Skalarprodukts durch diese Wellenfunktionen benutzen wir (70) und beachten dabei, daß nach (73) gilt

$$\chi_{(1)}(\vec{p}) = A^{-2}(\vec{p}) \chi_{(1)}(\vec{p}) = \frac{p_0 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{m} \chi_{(1)}(\vec{p})$$

bzw.

$$\chi_{(1)}(x) = \frac{i \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}}{m} \chi_{(1)}(x)$$

* Wir lassen wieder der Kürze halber bei Matrizen und Wellenfunktionen die Spinindizes weg.

Damit folgt

$$(75) \langle \phi | \chi \rangle = \int \phi_{(n)}^* \frac{p_0 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{m} \chi_{(n)}(\vec{r}) d\sigma = \frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi_{(n)}^*(x) \frac{i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}})}{m} \frac{1}{\partial t} \chi_{(n)}(x) d^3 \vec{r}$$

Insbesondere gilt deshalb auch

$$\langle \phi | \phi \rangle = \frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi_{(n)}^*(x) \frac{i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}})}{m} \frac{1}{\partial t} \phi_{(n)}(x) d^3 \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \text{In} \quad \rho(x) &= \frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \phi_{(n)}^*(x) \frac{i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}})}{m} \frac{1}{\partial t} \phi_{(n)}(x) \\ &= \frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \langle \phi | \frac{1}{m} \rho(x) | \phi \rangle \frac{i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}})}{m} \frac{1}{\partial t} \langle \phi | \frac{1}{m} \rho(x) | \phi \rangle \end{aligned}$$

liegt also eine Funktion vor, deren Raumintegral relativistisch invariant ist. Sie kann somit (wir setzen hier die Ladung gleich 1) als Ladungsdichte gedeutet werden.

Diese zweikomponentige Beschreibung des Spin 1/2 Teilchens ist zu der von Theis [15] äquivalent. Dort werden ausschließlich die $\phi_{(n)}(x)$, $\phi_{(n)}(\vec{r})$ verwandt und der Zusammenhang (74) mit den physikalisch näherliegenden $\phi(\vec{r})$ unerwähnt gelassen.

Eine vollständig lokale Theorie bekommen wir nach Abschnitt 4 durch Vereinigung von $\phi_{(n)}(x)$, $\phi_{(n)}(x)$ zu der 4 komponentigen Wellenfunktion $\phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{(n)}(x) \\ \phi_{(n)}(x) \end{pmatrix}$. Sie hängt gemäß

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{p_0+m} & + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \sqrt{p_0-m} \\ \sqrt{p_0+m} & + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \sqrt{p_0-m} \end{pmatrix} \phi(\vec{r}) e^{ip_0 x} d\sigma \right)$$

mit den $\phi(\vec{r})$ zusammen. Bei infinitesimalen Raumdrehungen bzw. Lorentztransformationen gilt nach (65) und (66)

$$\phi'(x) = \left\{ 1 - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \delta \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \delta \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right\} \phi(L^{-1}x)$$

(76) bzw.

$$\phi'(x) = \left\{ 1 + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \delta \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\delta \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right\} \phi(L^{-1}x)$$

Die Feldgleichung (67) erhält mit (73) die Form :

$$(77) \quad \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} \begin{pmatrix} (\vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) & 0 \\ 0 & -(\vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \phi(x) = 0$$

Sie geht somit offensichtlich in die Diracgleichung in der vander-Waerdenschen Darstellung über. Die Diracgleichung und die vierkomponentige Schreibweise folgen demnach also direkt aus der Forderung nach Lokalität bei Raumspiegelungen. Diese Forderung wird bei der gebräuchlichen Ableitung der Diracgleichung nicht explizit gestellt, ist im Falle $m \neq 0$ aber offenbar in der Forderung nach einer relativistischen Gleichung 1. Ordnung enthalten.

Bei der Bildung des Skalarprodukts aus den Wellenfunktionen kann man zunächst wieder wie bei der zweikomponentigen Theorie die Gleichung (70) benutzen und somit schreiben

$$\langle \phi | \chi \rangle = \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\phi_H^* \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} \chi_H + \phi_{(-)}^* \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} \chi_{(-)}) d^3 \vec{r}$$

Ausgedrückt in den 4-komponentigen Wellenfunktionen $\phi(x)$, $\chi(x)$ und mit der üblichen Bezeichnung $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lautet diese Gleichung

$$(78) \quad \langle \phi | \chi \rangle = \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi^* \beta \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} \chi d^3 \vec{r}$$

Andererseits ist hier aber auch die Integraldarstellung

$$(79) \quad \langle \phi | \chi \rangle = \frac{1}{2} \frac{m}{(2\pi)^3} \int \phi^* \chi d^3 \vec{r} = \frac{1}{2} \frac{m}{(2\pi)^3} \int (\phi_H^* \chi_H + \phi_{(-)}^* \chi_{(-)}) d^3 \vec{r}$$

möglich. Man verifiziert nämlich unter Benutzung von (73) leicht

$$A^{+2} + A^{-2} = \frac{2A}{m}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{m}{(2\pi)^3} \int (\phi_H^* \chi_H + \phi_{(-)}^* \chi_{(-)}) d^3 \vec{r} = \frac{m}{2(2\pi)^3} \iiint \phi(\vec{r}) (A(\vec{r}) A^+(\vec{r}') + A^-(\vec{r}) A^-(\vec{r}')) \chi(\vec{r}') e^{-4p \cdot p' x} d\vec{r} d\vec{r}' d^3 \vec{r} \\ & = \frac{m}{2} \int \phi(\vec{r}) \frac{A^{+2}(\vec{r}) + A^{-2}(\vec{r})}{p_0} \chi(\vec{r}) d\vec{r} = \int \phi^*(\vec{r}) \chi(\vec{r}) d\vec{r} = \langle \phi | \chi \rangle \end{aligned}$$

* Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tritt in der Diracgleichung (77) in der Verbindung $m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf, ist also mit dem gebräuchlichen β zu identifizieren.

Wir können hier also (vgl. S. 36) sowohl

$$(78a) \quad \rho(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \phi^*(x) \beta \frac{\partial}{\partial t} \phi(x)$$

als auch

$$(79a) \quad \rho(x) = \frac{1}{2} \frac{m}{(2\pi)^3} \phi^*(x) \phi(x)$$

als Ladungsdichte deuten, so daß offenbar die räumliche Verteilung der Ladung beim freien Feld nicht eindeutig festliegt. Dasselbe gilt natürlich auch für die Ströme, deren Zusammenhang mit den Wellenfunktionen aus dem Verhalten von $\rho(x)$ bei infinitesimalen Lorentztransformationen abgelesen werden kann. Es folgt

$$(78b) \quad \vec{j} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \phi^*(x) \beta \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \phi(x)$$

bzw.

(Vgl. Anhang g)

$$(79b) \quad \vec{j} = \frac{1}{2} \frac{m}{(2\pi)^3} \phi^*(x) \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \phi(x)$$

(Der Ansatz 79 eignet sich allerdings besser zur Konstruktion eichinvarianter Wechselwirkungen und ist daher vorzuziehen.)

Wir gehen jetzt zur Betrachtung des Falles $m=0$ über. Nach (38) folgt zunächst

$$A^\pm = \frac{\sqrt{A}}{2} \left(\pm \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} + 1 \right)$$

so daß wir die Wellenfunktionen

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{A} \left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} + 1 \right) e^{ipx} d\vec{p} \right)$$

bekommen. Sie haben wieder das Transformationsverhalten (76). Als Feldgleichung haben wir nach (68)

$$\left(\frac{1}{i} \begin{pmatrix} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) & 0 \\ 0 & -(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \end{pmatrix} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} \phi_H(x) \\ \phi_{\bar{H}}(x) \end{pmatrix} = 0$$

anzusetzen. Sie faßt die Weylschen Neutrino-Gleichungen für positive und negative Helizität zusammen. Das Skalarprodukt läßt sich nach obiger Bemerkung (vgl. S. 34) nur für solche Zustände durch die lokalen Wellenfunktionen ausdrücken, die sich aus den $|\vec{p} \pm \vec{s}\rangle$ zusammensetzen. Für $s=1/2$ ist dies jedoch keine Einschränkung, da

die $|\vec{p} \vec{\pm} \rangle$ bereits den ganzen Teilchenraum aufspannen. Es gelingt explizit durch

$$\langle \phi | \chi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi^*(\omega) \chi(\omega) d^3r$$

Der Beweis läßt sich wegen $A^\pm(\vec{p}) + A^\pm(\vec{p}) = B$ wie im Falle $m \neq 0$ (vgl. (79)) durchführen. Die Darstellung (78) ist hier nicht möglich, da nach (40) $A^\pm A^\pm = 0$ gilt. Man hat also (bis auf den Faktor $m/2$) für das geladene Spin 1/2-Teilchen der Masse 0 die Ladungs- bzw. Stromdichte (79a) bzw. (79b) anzusetzen.

c. Der Fall $s=1$

Wenn $s=1$ ist, so bekommt Σ^2 die Matrixgestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Es gilt also $(\Sigma^2)^3 = \Sigma^2$ bzw.

$$(80) \quad \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})^2}{|\vec{p}|^3} = \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})}{|\vec{p}|}$$

da die Beziehung invariant gegen die unitäre Transformation (7) ist.

Wir beginnen wieder mit dem Fall $m \neq 0$. (36) reduziert sich unter Benutzung von (80) auf

$$\begin{aligned} A^\pm &= \cosh\left(\frac{|\vec{\Sigma} \vec{p}|}{|\vec{p}|} \ln \frac{p_0 + |\vec{p}|}{m}\right) \pm \sinh\left(\frac{|\vec{\Sigma} \vec{p}|}{|\vec{p}|} \ln \frac{p_0 + |\vec{p}|}{m}\right) \\ &= 1 + \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})^2}{p^2} (\cosh \ln \frac{p_0 + |\vec{p}|}{m} - 1) \pm \frac{|\vec{\Sigma} \vec{p}|}{|\vec{p}|} \sinh \ln \frac{p_0 + |\vec{p}|}{m} \\ (81) \quad &= 1 + \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})^2}{m(p_0 + m)} \pm \frac{|\vec{\Sigma} \vec{p}|}{m} \\ A^{\pm 2} &= 1 + \frac{2}{m^2} (\vec{\Sigma} \vec{p})^2 \pm \frac{2 p_0}{m} (\vec{\Sigma} \vec{p}) \end{aligned}$$

Wir bekommen damit die lokale Wellenfunktion

$$(82) \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_+(x) \\ \phi_-(x) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})^2}{m(p_0 + m)} + \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})}{m} \\ 1 + \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})^2}{m(p_0 + m)} - \frac{(\vec{\Sigma} \vec{p})}{m} \end{pmatrix} \phi(\vec{p}) e^{ipx} d^3p$$

Insbesondere gilt für ihre dreikomponentigen Anteile $\phi_{\mu}(x)$, $\phi_{\pm}(x)$ bei infinitesimalen Raumdrehungen nach (66)

$$\phi_{\mu}'(x) = (1 - i(\delta\vec{\alpha}\vec{Z})) \phi_{\mu}(x')$$

Die Matrizen Σ^{μ} waren dabei bisher so gewählt, daß $\Sigma^{\pm}$ Diagonalgestalt hatte (vgl. S. 8). In dem hier betrachteten Fall $2s+1=3$ muß nun die Darstellung $\{\Sigma_{mn}^{\pm}\}$ zu der durch die Transformationsmatrizen Ω der Raumvektoren gegebenen natürlichen Darstellung der räumlichen Drehgruppe äquivalent sein, so daß es eine unitäre Matrix V gibt, die

$$V \Sigma(\Omega) V^{\dagger} = \Omega$$

leistet. Wir wollen deshalb im weiteren die nach

$$(83) \quad \bar{\Sigma}^{\mu'} = V \bar{\Sigma}^{\mu} V^{\dagger}, \quad \bar{f}_{\pm} = V \phi_{\mu}$$

transformierten Matrizen und Wellenfunktionen benutzen; letztere können dann als Raumvektoren aufgefaßt werden. Bei infinitesimalen Raumdrehungen gilt daher

$$\bar{f}_{\pm}'(x) = (1 - i(\delta\vec{\alpha}\vec{Z})) \bar{f}_{\pm}(x') = (1 + \delta\vec{\alpha} \times) \bar{f}_{\pm}(x')$$

so daß die Matrizen $\bar{\Sigma}^{\mu}$ die Gestalt

$$\bar{\Sigma}^{x'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Sigma}^{y'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Sigma}^{z'} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen müssen. Man überzeugt sich leicht, daß dies etwa durch die Wahl

$$(84) \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erreicht wird. Für die Wellenfunktionen erhalten wir nach Ausführung der Transformation (83) an (82)

$$(85) \quad \begin{pmatrix} \bar{f}_{+}(x) \\ \bar{f}_{-}(x) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{m(p_0+m)} + \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{m} \\ 1 + \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{m(p_0+m)} - \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{m} \end{pmatrix} \bar{f}(\vec{p}) e^{i p x} d\phi$$

mit $\bar{f}(\vec{p}) = V \phi(\vec{p})$. Die $\bar{f}_{\pm}(x)$ sind dann zwei lokale komplexe Vektorfelder, die sich bei infinitesimalen Lorentztransformatio-

nen $\delta \vec{a}$ wegen (66) nach

$$\vec{f}'_{\pm}(x) = (1 \pm (\delta \vec{a} \cdot \vec{E}')) \vec{f}_{\pm}(x') = \vec{f}_{\pm}(x') \pm i \delta \vec{a} \times \vec{f}_{\pm}(x')$$

transformieren. Bei Raumspiegelungen gilt nach (44)

$$P \vec{f}_{\pm}(Ft) = - \vec{f}_{\mp}(-rt)$$

wobei wie in Abschnitt 5 $\delta^2 = i^{2s} = -1$ gewählt ist. Die beiden Vektorfelder

$$\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{f}_+ + \vec{f}_-), \quad \vec{b} = \frac{1}{2i}(\vec{f}_+ - \vec{f}_-)$$

sind diesen Transformationseigenschaften etwas besser angepaßt:

$\vec{e}$ ist einfach ein polarer, $\vec{b}$ ein axialer Vektor, und bei infinitesimalen Lorentztransformationen gilt:

$$\begin{aligned} \vec{e}'(x) &= \vec{e}(x') - \delta \vec{a} \times \vec{b}(x') \\ \vec{b}'(x) &= \vec{b}(x') + \delta \vec{a} \times \vec{e}(x') \end{aligned}$$

Die Feldgleichungen für $\vec{f}_{\pm}$ lauten nach (67) und (81) nach Ausföhrung der Transformation (83)

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + \frac{2}{m^2} \left(\vec{E}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \right)^2 - \frac{2i}{m^2} \left(\vec{E}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{f}_+ &= \vec{f}_- \\ \left\{ 1 + \frac{2}{m^2} \left(\vec{E}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \right)^2 + \frac{2i}{m^2} \left(\vec{E}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{f}_- &= \vec{f}_+ \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen und Beachtung von $(\vec{E}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'}) \vec{f}_{\pm} = \text{rot} \vec{f}_{\pm}$ führt nach kurzer Rechnung zu

$$(86a) \quad \text{rot rot } \vec{e} + \text{rot } \vec{b} = 0$$

und ihre Subtraktion zu

$$(86b) \quad \text{rot rot } \vec{b} - \text{rot } \vec{e} = -m^2 \vec{b}$$

Diese beiden Feldgleichungen sind zusammen mit den aus (85) folgenden Klein-Gordon Gleichungen

$$\Delta \vec{e} - \ddot{\vec{e}} = m^2 \vec{e}, \quad \Delta \vec{b} - \ddot{\vec{b}} = m^2 \vec{b}$$

mit den in Feldstärken formulierten Proca-Gleichungen (vgl. Proca [16]) identisch. Die Größen $\vec{e}$ und $\vec{b}$ sind hier allerdings nicht als

Feldstärken aufzufassen, sondern wegen (vgl. (63))

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{2} V(\phi_M + \phi_H) = \frac{1}{2} \langle 0 | V(\psi_M(x) + \psi_H(x)) | \phi \rangle \equiv \langle 0 | \vec{E}(x) | \phi \rangle$$

$$(87) \quad \vec{B}(x) = \frac{1}{2i} V(\phi_M - \phi_H) = \frac{1}{2i} \langle 0 | V(\psi_M(x) - \psi_H(x)) | \phi \rangle \equiv \langle 0 | \vec{B}(x) | \phi \rangle$$

als Wellenamplituden und können daher komplex sein. Die Gleichungen (86) werden jedoch offensichtlich (vgl. (59)) auch von den Operatoren $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ erfüllt, die den Feldstärken entsprechen und deshalb hermitesch zu wählen sind⁺.

Das Skalarprodukt zweier Einteilchenzustände $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ lautet nach (70) und Ausführung der Transformation (83)

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\vec{f}_1^* \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}_2 - \vec{f}_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}_2^*) d^3r$$

Unter Benutzung von $\vec{f}_\pm = \vec{E} \pm i \vec{B}$ geht dies nach kurzer Rechnung in

$$(88) \quad \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\vec{E}_1^* \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_2^*) d^3r$$

über.

Wir kommen jetzt zum Fall $m=0, s=1$, dh. zum elektromagnetischen Feld. Dabei bleiben nach (66) alle Aussagen über das Transformationsverhalten der lokalen Wellenamplituden und Feldstärken wie im Falle $m \neq 0$ bestehen. Ebenso setzen wir wieder voraus, daß die Feldquanten keine Ladung tragen sollen, dh. daß die Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ hermitesch sind. Eine Änderung tritt lediglich bei der Darstellung der lokalen Wellenfunktionen durch die Spinamplituden $\vec{f}(\vec{p})$ und den Feldgleichungen ein, da bei der Berechnung von $A^\pm$ statt (36) (38) zu verwenden ist. Es folgt

$$A^\pm = \pm \frac{(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \left(\pm \frac{(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} + 1 \right) A_0 \quad \text{bzw.} \quad A^{\pm'} = \frac{(\vec{\Sigma}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \left(\frac{(\vec{\Sigma}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \pm 1 \right)$$

⁺Man macht sich leicht klar (vgl. Anhang h), daß dies durch die Wahl $a(\vec{p}) = b(\vec{p})$ in (62) erreicht wird. Falls geladene Vektormesonen beschrieben werden sollen, so muß man die Hermitezität (und damit auch die direkte Meßbarkeit) der Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ aufgeben.

und damit wegen $d\sigma = \frac{d^3 p}{p_0}$

$$(89) \quad \left(\begin{array}{c} \vec{f}_+(x) \\ f_-(x) \end{array} \right) = \int \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \left(\begin{array}{c} \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} + 1 \\ \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} - 1 \end{array} \right) \vec{f}(\vec{p}) e^{i p x} d^3 p$$

Die Feldgleichung (68) geht für $\vec{f}_\pm$ in

$$\left[\frac{1}{i} \left(\begin{array}{cc} \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & -\frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \end{array} \right) - i \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(\begin{array}{c} \vec{f}_+ \\ \vec{f}_- \end{array} \right) = 0$$

über. Wegen $\frac{1}{i} (\vec{z}' \cdot \vec{p}) \vec{f}_\pm = \text{rot } \vec{f}_\pm$ folgt auch

$$\text{rot } \vec{f}_+ = i \dot{\vec{f}}_+ \quad , \quad \text{rot } \vec{f}_- = -i \dot{\vec{f}}_-$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen führt zu

$$\text{rot } \vec{e} = -\dot{\vec{b}}$$

und ihre Subtraktion zu

$$\text{rot } \vec{b} = \dot{\vec{e}}$$

Die Quellen von $\vec{e}(x)$ und $\vec{b}(x)$ lassen sich aus (90) berechnen. Es folgt zunächst

$$\vec{e}(x) = \int \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{p^2} \vec{f}(\vec{p}) e^{i p x} d^3 p \quad , \quad \vec{b}(x) = \frac{1}{i} \int \frac{(\vec{z}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \vec{f}(\vec{p}) e^{i p x} d^3 p$$

und somit unter Beachtung von

$$(90) \quad \begin{aligned} \vec{e}(x) &= \int \left(\vec{f}(\vec{p}) - \vec{p} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{f})}{p^2} \right) e^{i p x} d^3 p = \int \vec{f}_\perp(\vec{p}) e^{i p x} d^3 p \\ \vec{b}(x) &= \int \frac{1}{|\vec{p}|} (\vec{p} \times \vec{f}) e^{i p x} d^3 p = \int \left(\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \times \vec{f}_\perp \right) e^{i p x} d^3 p \end{aligned}$$

Daraus schließt man sofort

$$\text{div } \vec{e} = 0 = \text{div } \vec{b}$$

Die Wellenamplituden $\vec{e}(x)$, $\vec{b}(x)$ und damit (vgl. (60)) auch die Operatoren $\vec{E}(x)$, $\vec{B}(x)$ erfüllen also die Maxwellgleichungen.

Der hier entwickelte Zugang zur Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes macht also nur von der Forderung Gebrauch, daß die Feldquanten die Ruhmasse 0 sowie den Spin 1 haben und keine Ladung tragen. Die Maxwellgleichungen treten als eine Folge davon auf.

7. Anhang.

a.) Nach (4) stellt sich die infinitesimale Raumdrehung im Spinraum durch

$$1 - i \delta \varphi (\vec{m} \cdot \vec{Z})$$

dar, wobei $\vec{m}$ die Drehachse, φ der Drehwinkel ist. Für endliche Drehungen um die Achse $\vec{m}$ folgt daraus

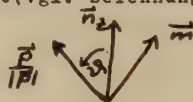
$$U = e^{-i \varphi (\vec{m} \cdot \vec{Z})}$$

Insbesondere gilt also für die Drehung um die zu $\vec{n}_z$ und $\vec{p}$ senkrechte Achse

$$\vec{m} = \frac{\vec{n}_z \times \vec{p}}{|\vec{p}| \sin \vartheta}$$

die die z-Achse $\vec{n}_z$ in $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ überführt (vgl. Zeichnung):

$$U(\vec{p}) = e^{-i \varphi \frac{(\vec{n}_z \times \vec{p}) \cdot \vec{Z}}{|\vec{p}| \sin \vartheta}}$$



Wegen $|\vec{p}| \sin \vartheta = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ und $(\vec{n}_z \times \vec{p}) \cdot \vec{Z} = p_x Z^y - p_y Z^x$ folgt schließlich

$$U(\vec{p}) = e^{i \varphi \frac{Z^x p_y - Z^y p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}}$$

b.) Wir beschränken uns auf die x-Komponente. Es gilt

und damit auf Grund der Linearität von $\left(\frac{\partial}{\partial p_x}\right)$ (vgl. Definition (5))⁺

$$\frac{\partial}{\partial p_x} p_x |p_x\rangle = \frac{\partial}{\partial p_x} p_x |p_x\rangle = p_x \frac{\partial}{\partial p_x} |p_x\rangle = p_x \frac{\partial}{\partial p_x} |p_x\rangle$$

$$\begin{aligned} p_x \frac{\partial}{\partial p_x} |p_x\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_x \frac{1}{\varepsilon} \{ |p_x + \varepsilon\rangle - |p_x\rangle \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ (p_x + \varepsilon) |p_x + \varepsilon\rangle - p_x |p_x\rangle \} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ p_x \frac{|p_x + \varepsilon\rangle - |p_x\rangle}{\varepsilon} + |p_x + \varepsilon\rangle \right\} = p_x \frac{\partial}{\partial p_x} |p_x\rangle + |p_x\rangle \end{aligned}$$

Somit folgt $\left[\frac{\partial}{\partial p_x}, p_x\right] |p_x\rangle = -|p_x\rangle$ bzw. $\left[\frac{\partial}{\partial p_x}, p_x\right] = -1$

+

$\frac{\partial}{\partial p_x}$ ist hier nicht mit $\frac{\partial}{\partial p_x}$ zu verwechseln.

c.) Es gilt nach (36) und (38)

$$A^{\pm} = e^{\pm \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|}} \ln \frac{R_0 + |\vec{p}|}{m} \quad \text{wenn } m \neq 0$$

$$A^{\pm} = R_0^s \left(\pm \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} - s + 1 \right) \dots \left(\pm \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} + s \right) \quad \text{wenn } m = 0$$

Daraus folgt sofort (39) sowie (40a): $A^{\pm} A^{\mp} = 1$ für $m \neq 0$.

Im Falle $m=0$ verifiziert man leicht:

$$\left(\pm \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} - s \right) A^{\pm} |\vec{p} \vec{n}\rangle = A^{\pm} \left(\pm \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} - s \right) |\vec{p} \vec{n}\rangle = (\pm \vec{n} - s) \dots (\pm \vec{n} + s) |\vec{p} \vec{n}\rangle$$

Da nun $\vec{n}$ die Werte $\vec{n} = -s, \dots, +s$ annehmen kann, läßt sich daraus das Verschwinden der rechten Seite für alle $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ schließen.

Auf Grund der Vollständigkeit der $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ folgt deshalb:

$$\left(\pm \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} - s \right) A^{\pm} = 0 = A^{\pm} \left(\pm \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} - s \right)$$

und somit auch: (40b) $A^{\pm} A^{\mp} = 0$ für $m=0$.

Zur Berechnung von $A^{\pm}(-\vec{p}-\vec{p}_0)$ wenn $m \neq 0$ verifizieren wir zunächst:

$$\ln \frac{-R_0 + |\vec{p}|}{m} = \ln \left(-\frac{m}{R_0 + |\vec{p}|} \right) = \pi i - \ln \frac{R_0 + |\vec{p}|}{m}$$

und erhalten damit:

$$A^{\pm 2}(-\vec{p}-\vec{p}_0) = e^{\mp 2 \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} (\pi i - \ln \frac{R_0 + |\vec{p}|}{m})} = e^{\mp 2 \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|} \pi i} A^{\pm 2}(\vec{p} \vec{p}_0)$$

Es gilt nun

$$e^{\mp 2 \pi i \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|}} |\vec{p} \vec{n}\rangle = e^{\mp 2 \pi i \vec{n}} |\vec{p} \vec{n}\rangle = \begin{cases} |\vec{p} \vec{n}\rangle & \text{wenn } \vec{n} \text{ ganzzahlig} \\ -|\vec{p} \vec{n}\rangle & \text{wenn } \vec{n} \text{ halbzahlig} \end{cases}$$

Da die $|\vec{p} \vec{n}\rangle$ ein vollständiges System bilden folgt daraus:

$$e^{\mp 2 \pi i \frac{(\vec{L} \cdot \vec{p})}{|\vec{p}|}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } s \text{ ganzzahlig} \\ -1 & \text{falls } s \text{ halbzahlig} \end{cases}$$

und somit:

$$A^{\pm 2}(-\vec{p}-\vec{p}_0) = (-1)^{2s} A^{\pm 2}(\vec{p} \vec{p}_0)$$

d.) Bei halbzahligem Spin erzeugen die $\mathcal{L}^h$ eine zweideutige Darstellung der Drehgruppe und zwar multiplizieren sich die Zustände bei einer Drehung um $2\vec{n}$ mit $e^{2\pi i (\vec{p} \cdot \vec{L})} = -1$ ($\vec{n}$ Drehachse, vgl. Anhang c.). Da man die zweifache Ausführung der Raumspiegelung auch

als Drehung um 2π auffassen kann (bei beiden Operationen ändert sich der physikalische Sachverhalt nicht), ist hier auch $\rho^2 = -1$ zulässig. Für die Faktoren δ bedeutet dies

$$\delta^2 = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \delta \text{ ganzzahlig} \\ \pm 1 & \text{wenn } \delta \text{ halbzahlig} \end{cases}$$

e.) Wählen wir etwa Z^Y imaginär, so wird Z^X wegen $i Z^X = [Z^Y, Z^Z]$ reell, da Z^Z reell ist. (55) lautet dann

$$\tau Z^X \tau^\dagger = -Z^X, \quad \tau Z^Y \tau^\dagger = Z^Y, \quad \tau Z^Z \tau^\dagger = -Z^Z$$

Dies läßt sich offensichtlich auch durch eine Drehung um den Winkel π um die y -Achse erreichen, so daß wir setzen können

$$\tau = e^{i\pi Z^Y}$$

Es gilt dann $\tau \tau^\dagger = \tau^\dagger \tau = e^{2\pi i Z^Y} = (-1)^{2S}$ (vgl. Anhang d)

Auf Grund der Antiunitarität von T gilt zunächst:

$$\begin{aligned} T Z^X | \vec{p} n \rangle &= T \{ | \vec{p} m \rangle Z_{mn}^X \} = \{ T | \vec{p} m \rangle \} Z_{mn}^{X*} \\ &= | -\vec{p} e \rangle T_{em} Z_{mn}^{X*} \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad Z^X T | \vec{p} n \rangle = Z^X | -\vec{p} m \rangle T_{mn} = | -\vec{p} e \rangle Z_{em}^X T_{mn}$$

Wegen $T Z^X + Z^X T = 0$ folgt daraus $T_{em} Z_{mn}^{X*} + Z_{em}^X T_{mn} = 0$

Durch die gleiche Relation sind aber auch gerade die $\tau^\dagger$ definiert (vgl. (55)), so daß wir $T_{mn} = \tau_{mn}^\dagger$ ansetzen können.

f.) Sollen die a -Teilchen die Ladung $+1$ und die b -Teilchen die Ladung -1 tragen, so muß für die Zustände $| n_a n_b \rangle$ mit definierten Anzahlen n_a von a -Teilchen und n_b von b -Teilchen gelten:

$$Q | n_a n_b \rangle = (n_a - n_b) | n_a n_b \rangle$$

Damit folgt

$$Q a^+ |n_a n_b\rangle = ((n_a + 1) - n_b) a^+ |n_a n_b\rangle$$

$$Q b^+ |n_a n_b\rangle = (n_a - (n_b + 1)) b^+ |n_a n_b\rangle$$

und somit

$$[Q, a^+] |n_a n_b\rangle = a^+ |n_a n_b\rangle$$

$$[Q, b^+] |n_a n_b\rangle = -b^+ |n_a n_b\rangle$$

Auf Grund der Vollständigkeit der Zustände $|n_a n_b\rangle$ schließt man daraus

$$[Q, a^+] = a^+ \quad , \quad [Q, b^+] = -b^+$$

g.) Nach (76) gilt bei infinitesimalen Lorentztransformationen:

$$\phi'(x) = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta \vec{u} \vec{e} & 0 \\ 0 & -\delta \vec{u} \vec{e} \end{pmatrix} \right\} \phi(x)$$

bzw.

$$\phi'^*(x) = \phi^*(x') \left\{ 1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta \vec{u} \vec{e} & 0 \\ 0 & -\delta \vec{u} \vec{e} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit}$$

so daß wir bei Vernachlässigung der Glieder der Ordnung $\delta \vec{u}^2$ folgern können

$$\phi'^*(x) \beta \phi'(x) = \phi^*(x') \beta \phi(x')$$

da $\begin{pmatrix} \vec{e} & 0 \\ 0 & -\vec{e} \end{pmatrix} \beta + \beta \begin{pmatrix} \vec{e} & 0 \\ 0 & -\vec{e} \end{pmatrix}$ verschwindet.

($\phi^* \beta \phi$ ist also ein Skalarfeld). Da weiter $(d\vec{r} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) + (dt \frac{\partial}{\partial t})$ invariant sein muß, transformieren sich $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ nach

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - (\delta \vec{u} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \delta \vec{u} \frac{\partial}{\partial t}$$

Wenden wir dies auf die Transformation von (78a) an, so folgt

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \phi^*(x') \beta \frac{\partial}{\partial t'} \phi(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \phi^*(x') \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} - \delta \vec{u} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \phi(x') \\ &= \phi(x') - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \phi^*(x') \beta (\delta \vec{u} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \phi(x') \end{aligned}$$

Fassen wir also $\mathcal{P}$ als Zeitkomponente eines Vierervektors auf, so lautet der Raumteil dazu

$$(78b) \quad \vec{\mathcal{P}} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \phi^*(x) \beta \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \phi(x)$$

Die gleichen Überlegungen wenden wir auch bei (79) an. Es folgt:

$$\begin{aligned} \phi'(k) &= \frac{m}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \phi^{*'}(k) \phi'(k) = \frac{m}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \phi^\dagger(k) \phi(k) + \phi^{*'}(k) \begin{pmatrix} (s\vec{u}\vec{e}) & 0 \\ 0 & -(s\vec{u}\vec{e}) \end{pmatrix} \phi(k') \right\} \\ &= \phi(k') + \frac{m}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \phi^{*'}(k) \begin{pmatrix} (s\vec{u}\vec{e}) & 0 \\ 0 & -(s\vec{u}\vec{e}) \end{pmatrix} \phi(k') \end{aligned}$$

so daß hier als Strom

$$(79b) \quad \vec{j} = \frac{m}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \phi^\dagger(k) \begin{pmatrix} \vec{e} & 0 \\ 0 & -\vec{e} \end{pmatrix} \phi(k)$$

anzusetzen ist.

h.) Da V nach (83) die Σ^k auf eine rein imaginäre Form bringt, gilt mit (55)

$$V \Sigma^k V^\dagger = -V^* \Sigma^{k*} V^{*+} = V^* \tau \Sigma^k \tau^\dagger V^{*+} \text{ bzw. } (V^\dagger V^* \tau) \Sigma^k = \Sigma^k (V^\dagger V^* \tau)$$

für alle k . Da nun die Σ^k ein vollständiges Erzeugersystem einer irreduziblen Darstellung der Drehgruppe bilden, muß $V^\dagger V^* \tau$ nach dem Schur'schen Lemma ein Vielfaches der 1 sein. Auf Grund der Unitarität von $V^\dagger V^* \tau$ folgt dann

$$V^\dagger V^* \tau = e^{i\gamma} \quad (\gamma \text{ reell})$$

Durch die Umdefinition $V' = e^{i\gamma} V$ (V ist ja nur bis auf Phasenfaktoren bestimmt) können wir also

$$V^\dagger V^* \tau = 1 \quad \text{bzw.} \quad \tau V^\dagger = V^{*+}$$

erreichen. Weiter gilt $V_{\alpha\beta}^* V_{\beta'k}^\dagger = V_{\beta'k}^\dagger V_{\alpha\beta}^{*+}$ bzw. $V^* V^\dagger(k) = V^\dagger(k) V^*$. Damit folgt nach (62)

$$V^* \begin{pmatrix} V_{k_1 k_1}^\dagger \\ V_{k_1 k_2}^\dagger \end{pmatrix}^\dagger = \int \left[a^+ \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} V^\dagger e^{-i p x} + b \begin{pmatrix} A^{*-} \\ A^{*+} \end{pmatrix} \tau V^\dagger e^{i p x} \right] d\theta$$

Setzen wir also $a = b$ und benutzen $\tau V^\dagger = V^{*+}$ so ergibt sich

$$V^* \begin{pmatrix} V_{k_1 k_1}^\dagger \\ V_{k_1 k_2}^\dagger \end{pmatrix}^\dagger = \int \left[a^+ \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} V^\dagger e^{-i p x} + a \begin{pmatrix} A^{*-} \\ A^{*+} \end{pmatrix} V^{*+} e^{i p x} \right] d\theta$$

Damit folgt sofort

$$\vec{E}^+(x) = \frac{1}{2} v^* (\psi_{(H)}^+(x) + \psi_{(H)}^-(x)) = \int [a^+ \frac{A^+ + A^-}{2} v^+ e^{ipx} + \frac{A^+ + A^-}{2} v^+ e^{ipx}] d\sigma$$

$$\vec{B}^+(x) = \frac{i}{2} v^* (\psi_{(H)}^+(x) - \psi_{(H)}^-(x)) = i \int [a^+ \frac{A^+ - A^-}{2} v^+ e^{-ipx} - a \frac{A^+ - A^-}{2} v^+ e^{ipx}] d\sigma$$

sowie $\vec{E}^+(x) = \vec{E}^-(x) \quad , \quad \vec{B}^+(x) = \vec{B}^-(x)$

Herrn Professor Dr. H. Steinwedel möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie sein ständiges Interesse herzlich danken.

Literatur

1. N.N.Bogoliubov,D.V.Shirkov Introd.to the Theory of Quantized
Fields.Int.Publ.New York(1959)
2. W.Pauli Phys.Rev. 58 716 (1940)
3. G.Lüders,B.Zumino Phys.Rev. 110 1450 (1958)
4. T.D.Newton,E.P.Wigner Rev.Mod.Phys. 21 400 (1949)
5. E.P.Wigner Nuovo Cimento. 3 517 (1956)
6. S.S.Schwebe An Introd.to Rel.Qu.Field Theory
Harper&Row Publ. New York
7. M.Shirkov Sov.Phys.JETP 6 664,919,929 (1958)
8. H.Joos Forts.d.Phys. 10 (3) 65 (1958)
9. E.P.Wigner Rev.Mod.Phys. 29 255 (1957)
10. L.H.Thomas Phil.Mag. (7) 3 1 (1927)
11. W.Langbein Diplomarb. Frankfurt/M (1963)
12. U.Schröder Dissertation Frankfurt/M (1962)
13. V.Bergmann Ann.of Math.48 568 (1947)
M.A.Naimark Am.Math.Soc.Transl.Series 2,Vol.6
14. G.Grawert,G.Lüders,H.Rollnik Forts.d.Phys. 7 291 (1959)
15. W.R.Theis Forts.d.Phys. 7 559 (1959)
16. A.Proca Journ.de Phys.et Rad. 7 347 (1936)

L e b e n s l a u f

Am 26.5.1938 wurde ich, Werner L a n g b e i n , als Sohn des Chemikers Dr.Gerhard Langbein und seiner Ehefrau Dr.Gertrud Langbein, geborene Lehmann, in Frankfurt-Höchst geboren. Bis zu meinem 25.Lebensjahr wohnte ich in Hofheim/Ts. Im Herbst 1944 wurde ich in die dortige Volksschule aufgenommen und besuchte sie abgesehen von einer halbjährigen Unterbrechung durch Kriegsgeschehnisse bis Ostern 1949. Anschließend trat ich in die städtische Mittelschule Hofheim ein. Pfingsten 1952 wechselte ich in das Leibniz-Realgymnasium in Frankfurt-Höchst über, wo ich auch am 5.3.1958 die Reifeprüfung ablegte. Von Beginn des Sommersemesters 1958 bis Ende des Sommersemesters 1963 war ich an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt/M. mit dem Hauptfach Physik immatrikuliert. Am 11.5.1960 legte ich die Diplom-Vorprüfung und am 26.2.1963 die Diplom-Hauptprüfung ab. Das Thema meiner unter Leitung von Prof.Dr.Steinwedel angefertigten Diplomarbeit lautete: "Bemerkungen zu zwei Fragen aus der Relativitätstheorie". Im Mai 1963 begann ich mit der Ausarbeitung meiner Dissertation. Seitdem bin ich auch am Institut für theoretische Physik in Würzburg als wissenschaftliche Hilfskraft tätig.

